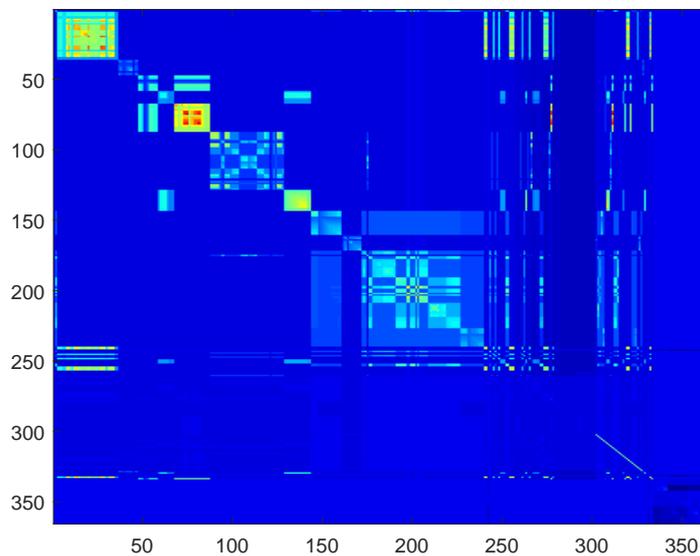


# Anwendung parametrischer Sensitivitätsanalyse in der Lastflussberechnung von elektrischen Energienetzen

Masterarbeit

vorgelegt von

Niklas Requate



1. Gutachter: Prof. Dr. Christof Büskens

2. Gutachter: Dr. Matthias Knauer

21. Dezember 2017

## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Bremen, den 21.12.2017

---

(Niklas Requate)



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen elektrischer Netzwerke</b>	<b>3</b>
1.1 Grundlagen der Wechselstromlehre . . . . .	3
1.2 Elektrische Grundelemente . . . . .	5
1.2.1 Der Ohmsche Widerstand . . . . .	6
1.2.2 Der Kondensator . . . . .	6
1.2.3 Die Spule . . . . .	7
1.2.4 Der komplexe Widerstand . . . . .	8
1.2.5 Die komplexe Scheinleistung . . . . .	9
1.3 Elektrische Übertragungsnetzte . . . . .	11
1.3.1 Aufbau des deutschen Stromnetzes . . . . .	12
1.3.2 Drehstrom . . . . .	14
1.3.3 Elektrische Leitungen . . . . .	16
1.3.4 Transformatoren . . . . .	17
1.4 Lastflussberechnung . . . . .	19
1.4.1 Das Knotenpotentialverfahren . . . . .	19
1.4.2 Leistungsgleichung für Netzwerkknoten . . . . .	22
1.4.3 Die Lastflussgleichungen . . . . .	24
1.4.4 Spannungsstabilität . . . . .	24
<b>2 Parameterabhängige nichtlineare Optimierung</b>	<b>26</b>
2.1 Parametergestörte nichtlineare Optimierungsprobleme . . . . .	27
2.1.1 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung . . . . .	29
2.1.2 Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung . . . . .	30
2.2 Parametrische Sensitivitätsanalyse . . . . .	30
2.2.1 Lineare Störungen in den Nebenbedingungen . . . . .	37
2.2.2 Approximation der Lösung des parametergestörten Problems . . . . .	38
2.3 Sequentielle quadratische Programmierung (Das lokale SQP-Verfahren) . . . . .	41

<b>3</b>	<b>Anwendung in elektrischen Netzwerken</b>	<b>45</b>
3.1	Allgemeines Lastflussoptimierungsproblem . . . . .	45
3.2	Das spezielle Lastflussoptimierungsproblem ohne Freiheitsgerade . . . . .	47
3.3	Die parametrischen Sensitivitäten der Spannung im Bezug auf die Leistung	50
3.4	Starklast und Schwachlast . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Numerische Auswertung</b>	<b>54</b>
4.1	Vergleich der Sensitivitätsmatrix mit der Netzstruktur . . . . .	55
4.2	Vergleich der Approximationen mit erneuten Lastflussberechnungen . . .	60
4.3	Berechnung des Schwachlastfalls mit den Sensitivitäten des Starklastfalls .	70
4.4	Möglichkeiten der Anwendung . . . . .	73
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>77</b>
	<b>Anhang</b>	<b>79</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>89</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Zeigerdiagramm für sinusförmige Wechselgrößen von Spannung und Strom	4
1.2	Schaltsymbol des Widerstandes . . . . .	6
1.3	Schaltsymbol des Kondensators . . . . .	7
1.4	Schaltsymbol der Spule . . . . .	8
1.5	Aufbau des deutschen Stromnetzes . . . . .	13
1.6	Verschaltung von Drehstrom im Stern und im Dreieck . . . . .	14
1.7	Ersatzschaltbild einer elektrisch kurzen Leitung . . . . .	17
1.8	Ersatzschaltbild eines Transformators . . . . .	18
1.9	Schaltsymbol des Transformators . . . . .	19
1.10	Netzausschnitt zwischen zwei Knoten . . . . .	20
1.11	Netzknoten . . . . .	23
4.1	Sensitivitätsmatrix des Betrages der Spannung nach der Wirkleistung . .	56
4.2	Netzausschnitt mit den Knoten 69 bis 88 . . . . .	57
4.3	Grafische Darstellung der Spalte 82 der normierten Sensitivitätsmatrix (3.9)	58
4.4	Grafische Darstellung der Spalten 69 bis 88 der Sensitivitätsmatrix (3.9)	58
4.5	Sensitivitätsmatrix des Betrages der Spannung nach der Blindleistung . .	59
4.6	Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei einer Störung mit $\Delta P^-$ und $\Delta Q^-$ . . . . .	61
4.7	Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei einer Störung mit $\Delta P^-$ und $\Delta Q^-$ . . . . .	62
4.8	Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei einer Störung mit $\Delta P^+$ und $\Delta Q^+$ . . . . .	62
4.9	Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei einer Störung mit $\Delta P^+$ und $\Delta Q^+$ . . . . .	63
4.10	Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei $\Delta P_{28} = -100$ kW . . . . .	66
4.11	Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei $\Delta P_{28} = -100$ kW . . . . .	66
4.12	Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei $\Delta P_{28} = -500$ kW . . . . .	67
4.13	Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei $\Delta P_{28} = -500$ kW . . . . .	67
4.14	Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei $\Delta P_{28} = -4000$ kW . . . . .	68
4.15	Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei $\Delta P_{28} = -4000$ kW . . . . .	68

4.16 Fehler in den Nebenbedingungen der approximierten Lösung bei $\Delta P_{28} = -100 \text{ kW}$ . . . . .	69
4.17 Fehler in den Nebenbedingungen der approximierten Lösung bei $\Delta P_{28} = -500 \text{ kW}$ . . . . .	69
4.18 Fehler in den Nebenbedingungen der approximierten Lösung bei $\Delta P_{28} = -4000 \text{ kW}$ . . . . .	70
4.19 Maximale Spannungsänderung im Netz für Leistungsänderungen in jedem Knoten . . . . .	74
4.20 Mittlere quadratische Spannungsänderung im Netz für Leistungsänderungen in jedem Knoten . . . . .	75
A.1 Ersatzschaltplan des untersuchten Mittelspannungsnetzes . . . . .	86
A.2 Netzausschnitt mit den Knoten 4 bis 37 . . . . .	87
A.3 Grafische Darstellung der Spalten 4 bis 37 der Sensitivitätsmatrix (3.9) . . . . .	88

# Tabellenverzeichnis

4.1	Approximationsfehler mit und ohne Zulässigkeitsselbstkorrektur in der 2-Norm . . . . .	65
4.2	Approximationsfehler mit und ohne Zulässigkeitsselbstkorrektur in der Maximums-Norm . . . . .	65
4.3	Iterationsverlauf der Zulässigkeitsselbstkorrektur bei der Berechnung des Schwachlastfalls mit den Sensitivitäten des Starklastfalls . . . . .	71
4.4	Vergleich der Rechenzeiten bei der Berechnung des Schwachlastfalls . . . .	72

# Symbolverzeichnis

## Allgemeine elektrische Größen:

$u(t) \in \mathbb{R}$	Zeitlich variable Spannung
$i(t) \in \mathbb{R}$	Zeitlich variabler Strom
$\hat{u} \in \mathbb{R}$	Amplitude der Spannung
$\hat{i} \in \mathbb{R}$	Amplitude des Stroms
$\varphi_u$	Phasenverschiebung der Spannung
$\varphi_i$	Phasenverschiebung des Stroms
$T \in \mathbb{R}$	Periodendauer
$\omega \in \mathbb{R}$	Kreisfrequenz
$U \in \mathbb{R}$	Effektivwert der Spannung
$I \in \mathbb{R}$	Effektivwert des Stroms
$j$	Imaginäre Einheit
$\underline{U}(t) \in \mathbb{C}$	Komplexer Effektivwert-Drehzeiger der Spannung
$\underline{I}(t) \in \mathbb{C}$	Komplexer Effektivwert-Drehzeiger des Stroms
$\underline{U} \in \mathbb{C}$	Komplexer Effektivwert-Festzeiger der Spannung
$\underline{I} \in \mathbb{C}$	Komplexer Effektivwert-Festzeiger des Stroms
$R$	Ohmscher Widerstand / Wirkwiderstand
$G$	Ohmscher Leitwert/ Wirkleitwert
$X$	Blindwiderstand
$B$	Blindleitwert
$\underline{Z}$	Komplexer Widerstand/Impedanz
$\underline{Y}$	Komplexer Leiterwert/Admittanz
$\underline{S} \in \mathbb{C}$	Scheinleistung
$p(t) \in \mathbb{R}$	Zeitlich variable Leistung
$P \in \mathbb{R}$	Wirkleistung
$Q \in \mathbb{R}$	Blindleistung

## Größen für die Analyse von elektrischen Netzen:

$K \in \mathbb{N}$	Anzahl der Knoten im Netzwerk
$\underline{U} \in \mathbb{C}^K$	Vektor der komplexen Knotenspannungen eines Netzwerks
$\underline{I} \in \mathbb{C}^K$	Vektor der komplexen Knotenströme eines Netzwerks
$\underline{S} \in \mathbb{C}^K$	Vektor der komplexen Scheinleistungen eines Netzwerks
$P \in \mathbb{R}^K$	Vektor der komplexen Wirkleistungen eines Netzwerks
$Q \in \mathbb{R}^K$	Vektor der komplexen Blindleistungen eines Netzwerks
$\underline{Y} \in \mathbb{C}^{K \times K}$	Admittanzmatrix des Netzwerks
$U^{nom} \in \mathbb{R}^K$	Vektor der Nominalspannung des Netzwerks
$U^c \in \mathbb{R}^{C_U}$	Vektor der konstanten Beträge der Knotenspannungen
$\varphi^c \in \mathbb{R}^{C_\varphi}$	Vektor der konstanten Phasen der Knotenspannungen
$P^c \in \mathbb{R}^{C_P}$	Vektor der konstanten Wirkleistungen
$Q^c \in \mathbb{R}^{C_Q}$	Vektor der konstanten Blindleistungen
$U^v \in \mathbb{R}^{C_U}$	Vektor der variablen Beträge der Knotenspannungen
$\varphi^v \in \mathbb{R}^{C_\varphi}$	Vektor der variablen Phasen der Knotenspannungen
$P^v \in \mathbb{R}^{C_P}$	Vektor der variablen Wirkleistungen
$Q^v \in \mathbb{R}^{C_Q}$	Vektor der variablen Blindleistungen
$B \in \mathbb{N}$	Anzahl der Bilanzknoten im Netzwerk
$D \in \mathbb{N}$	Anzahl der $P, Q$ -Knoten im Netzwerk
$\underline{U}^c \in \mathbb{C}^B$	Vektor der komplexen, konstanten Knotenspannungen (Spannungen der Bilanzknoten)
$\underline{U}^v \in \mathbb{C}^D$	Vektor der komplexen, variablen Knotenspannungen (Spannungen der $P, Q$ -Knoten)
$\tilde{d}_U \in \mathbb{R}^D$	Vektor der prozentualen, approximierten Spannungsänderungen
$d_U \in \mathbb{R}^D$	Vektor der prozentualen, tatsächlichen Spannungsänderungen
$e_U \in \mathbb{R}^D$	Vektor des Fehlers zwischen approximierten und tatsächlichen, prozentualen Spannungsänderungen
$P^L, Q^L \in \mathbb{R}^D$	Vektoren der Wirk- und Blindleistungen der Verbraucher
$P^G, Q^G \in \mathbb{R}^D$	Vektor der Wirk- und Blindleistungen der Erzeuger
$P^{SL}, Q^{SL} \in \mathbb{R}^D$	Vektor der Wirk- und Blindleistungen im Starklastfall
$P^{LL}, Q^{LL} \in \mathbb{R}^D$	Vektor der Wirk- und Blindleistungen im Schwachlastfall
$x^{SL} \in \mathbb{R}^{4k}$	Lösung des Schwachlastfalls
$x^{LL} \in \mathbb{R}^{4k}$	Lösung des Schwachlastfalls
$\tilde{x}^{LL} \in \mathbb{R}^{4k}$	Approximierte Lösung des Schwachlastfalls
$r$	Anzahl der Iterationen bei der Zulässigkeits selbstkorrektur

## Größen für die Theorie nichtlinearer Optimierungsprobleme:

$x \in \mathbb{R}^{N_x}$	Optimierungsvariable
$p \in \mathbb{R}^{N_p}$	Parameter des Optimierungsproblems
$p_0 \in \mathbb{R}^{N_p}$	Nominalparameter
$f : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$	Zielfunktion des Optimierungsproblems
$g : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$	Ungleichheitsnebenbedingungen des Optimierungsproblems
$h : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$	Gleichheitsnebenbedingungen des Optimierungsproblems
$S(p)$	Zulässige Menge des Optimierungsproblems
$\mathcal{A}(x, p)$	Menge der aktiven Indizes des Optimierungsproblems
$x^* \in \mathbb{R}^{N_x}$	Optimale Lösung des Optimierungsproblems
$L : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_g} \times \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}$	Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems
$\lambda \in \mathbb{R}^{N_g}$	Lagrange-Multiplikator der Ungleichheitsnebenbedingungen
$\mu \in \mathbb{R}^{N_h}$	Lagrange-Multiplikator der Gleichheitsnebenbedingungen
$q \in \mathbb{R}^{N_q}$	Lineare Störung in den Nebenbedingungen
$\tilde{x} \in \mathbb{R}^{N_x}$	Durch Sensitivitäten approximierte Optimierungsvariable

## Allgemeine Notationen:

Für eine Variable  $y \in \mathbb{R}^{N_y}$  und eine differenzierbare Funktion  $s = (s_1, \dots, s_{N_s})^T : \mathbb{R}^{N_y} \rightarrow \mathbb{R}^{N_s}$  gelten folgende Notationen bei der Ableitungsberechnung:

$$\nabla_y s_i(y)^T = \left( \frac{\partial s_i}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial s_i}{\partial y_{N_y}}(y) \right) \in \mathbb{R}^{N_y} \quad \text{Gradient von } s_i$$

$$\nabla_y s(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial s_1}{\partial y_2}(y) & \cdots & \frac{\partial s_1}{\partial y_{N_y}}(y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_{N_s}}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial s_{N_s}}{\partial y_2}(y) & \cdots & \frac{\partial s_{N_s}}{\partial y_{N_y}}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_y s_1(y)^T \\ \vdots \\ \nabla_y s_{N_s}(y)^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_s} \quad \text{Jacobi-Matrix von } s$$

$\|y\|$       2-Norm/Euklidische Norm von  $y$

$\|y\|_\infty$     Maximums-Norm von  $y$

$\mathcal{O}(\|\cdot\|^k)$     Landau-Symbolik

# Einleitung

„Die deutschen Verteilernetze bilden das Rückgrat der angestrebten Energiewende“ ([1], S. 7). So heißt es in einer Studie im Auftrag des Bundesministeriums für Wirtschaft und Energie (BMWi). Zu den Verteilernetzen, auch Verteilnetze genannt, werden Hoch-, Mittel- und Niederspannungsnetze gerechnet, die laut dieser Studie mit 1,7 Mio. Kilometern ca. 98 % der Leitungslänge des deutschen Stromnetzes ausmachen und an die 90 % der Leistung aller Erneuerbare-Energien-Anlagen angeschlossen ist (vgl. ebd.). Die Verteilnetze sind Gegenstand von verschiedenen Studien, wie etwa der oben genannten Verteilernetzstudie oder der dena-Verteilnetzstudie (vgl. [2]). In diesen Studien wird versucht, den Netzausbaubedarf auf den verschiedenen Spannungsebenen unter Berücksichtigung der fortlaufenden Veränderungen des Energiemarktes durch den Ausbau der erneuerbaren Energien und der zunehmenden dezentralen Energieversorgung abzuschätzen. Bei der Planung von Netzen werden die elektrischen Eigenschaften eines Netzes für verschiedene Extremfälle im stationären Zustand untersucht, um dieses so auszulegen, dass es vorgegebene elektrische Grenzen nicht überschreitet. Insbesondere ist in jedem Knoten zu gewährleisten, dass die Abweichung von der Nominalspannung des Netzes eine festgelegte Prozentzahl nicht überschreitet, sowie dass die Stromgrenzen der Leitungen des Netzes eingehalten werden.

Die so genannte Lastflussberechnung bzw. Leistungsflussanalyse oder auch Lastflussanalyse stellt ein für allgemeine elektrische Netzwerke verwendetes Verfahren dar, das zur Ermittlung der Netzeigenschaften im stationären Zustand verwendet wird. Damit können bei Vorgabe der am Netz angeschlossenen Leistungen die Spannungen in den Netzknoten bestimmt und damit sowohl die Abweichung von der Nominalspannung als auch der Stromfluss in den Leitungen berechnet werden. Dieses Verfahren wird beispielsweise in den oben genannten Studien verwendet, um den Netzausbaubedarf festzustellen. Da die Spannung allerdings nur im stationären Zustand des Netzes berechnet wird, können keine Aussagen über die Dynamik des Netzes oder über den Einfluss von Änderungen der Leistung in einzelnen Knoten getroffen werden. Durch den zunehmenden Anschluss erneuerbarer Energien an die Verteilernetze sind Leistungsänderungen nicht nur kurzfristig bei der dynamischen Spannungs- und Frequenzhaltung im Netz zu berücksichtigen, sondern auch bei der Planung der Netze. Denn der Umbau eines Netzes verursacht enorme Kosten und soll so selten und gering wie möglich erfolgen. Der Anschluss von Elektrofahrzeugen stellt außerdem eine in den kommenden Jahren zunehmende Belastung für das Netz dar, sodass insgesamt bei der Planung die Spannungsstabilität des Netzes nicht nur im aktuellen, sondern vor allem in zukünftigen Szenarien gewährleistet sein muss. Dafür kann der Einfluss der Leistung einzelner Knoten von besonderer Bedeutung sein, da das Netz in Knoten mit großem Einfluss entweder besonders stabil gebaut sein sollte

oder in diesen Knoten keine großen Leistungsänderungen geplant werden sollten.

Eine Möglichkeit zur Ermittlung kritischer Punkte im Netz ist das mehrfache Lösen der Lastflussberechnung in verschiedenen zufälligen Szenarien, wie bei der probabilistischen Lastflussanalyse, die aber durch die hohe Anzahl an Lastflussberechnungen mit einem hohen Rechenaufwand verbunden ist (vgl. [3]). In dieser Arbeit wird eine Möglichkeit untersucht, den Einfluss der Leistung in einem Knoten des Netzes auf die Spannung in anderen Knoten direkt beim Lösen der Lastflussgleichungen zu erhalten. Dazu werden die parametrischen Sensitivitäten oder Sensitivitätsableitungen verwendet, die eine lineare Näherung daran angeben, wie eine Variable von einem Parameter abhängt. Mit der Leistung als Parameter und der Spannung als Variable der Lastflussgleichungen, können die Sensitivitäten für die Berechnung dieser Abhängigkeit verwendet werden. In zukünftigen Planungen könnte der Nutzen der Sensitivitäten darin bestehen den Zeitaufwand zu reduzieren oder die Qualität der Lösung von Netzplanungsalgorithmen zu verbessern.

Die Sensitivitätsableitungen sind beim Lösungsprozess eines Optimierungsproblems mit dem SQP-Verfahren fast ohne zusätzliche Berechnungskosten verfügbar. Eine Implementierung der Lastflussgleichungen als Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems wird bereits in einem bestehenden Algorithmus zur Zielnetzplanung der AG Optimierung und Optimale Steuerung an der Universität Bremen verwendet und bietet zusätzlich zur effizienten Berechnung der Sensitivitäten den Vorteil, dass die Optimierung bestimmter Variablen möglich ist. Für diese Arbeit ist die Optimierung selbst aber nicht von vorrangiger Bedeutung, sondern vor allem die sich daraus ergebenden Sensitivitäten. Das Ziel ist es zu untersuchen, wie gut die Sensitivitätsableitungen den Einfluss von Leistungsänderungen auf die Spannung im Netz abbilden können. In den Untersuchungen geht es dabei insbesondere darum, die Aussagekraft der Sensitivitäten zu validieren, indem die Struktur des Netzes beachtet wird und lineare Approximationen durch die Sensitivitätsableitungen mit Ergebnissen durch erneutes Lösen der Lastflussgleichungen verglichen werden. Anhand dessen werden Möglichkeiten der Verwendung bei der Zielnetzplanung aufgezeigt.

Dazu werden im ersten Kapitel die Grundlagen elektrischer Netzwerke und die Lastflussgleichungen erläutert. Im zweiten Kapitel dient die mathematische Theorie der nichtlinearen Optimierung für ein parametergestörtes Problem vor allem der Formulierung des Sensitivitätssatzes, der die Grundlage für die parametrische Sensitivitätsanalyse darstellt. Dabei wird auch kurz auf die numerische Lösung von Optimierungsproblem eingegangen. In Kapitel 3 werden schließlich das Lastflussoptimierungsproblem aufgestellt und die Anwendung der Sensitivitätsanalyse im konkreten Fall erläutert. Numerische Ergebnisse werden im vierten Kapitel vorgestellt. Die Untersuchungen erfolgen anhand realer Daten eines Mittelspannungsnetzes in Deutschland.

# 1 Grundlagen elektrischer Netzwerke

Da elektrische Verteilnetze mit Dreiphasenwechselstrom betrieben werden, basiert die Lastflussberechnung auf der komplexen Wechselstromrechnung, in der Spannung, Strom, und Leistung, sowie Ohmsche Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten als komplexe Größen behandelt werden. Um die Lastflussgleichungen für ein Verteilnetz aufzustellen, werden daher zunächst die notwendigen Begriffe aus der elektrischen Wechselstromlehre eingeführt und anschließend Ersatzschaltbilder für einzelne Komponenten eines Netzwerks näher spezifiziert. Schließlich werden die Lastflussgleichungen mit diesen Komponenten und durch Anwendung des Knotenpotentialverfahrens hergeleitet.

Als imaginäre Einheit wird in der gesamten Arbeit  $j$  zur Unterscheidung von der Bezeichnung für den Strom verwendet. Diese ist durch die Eigenschaft  $j^2 = -1$  definiert. Komplexe Größen werden in der gesamten Arbeit durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Für die elektrischen Größen werden die in der Elektrotechnik üblichen Bezeichnungen verwendet. Eine Auflistung der Bezeichnungen und Symbole ist im Symbolverzeichnis zu finden.

## 1.1 Grundlagen der Wechselstromlehre

Für elektrische Systeme mit sinusförmiger Anregung wird in der Elektrotechnik die komplexe Wechselstromrechnung verwendet. Durch die Verwendung komplexer Größen können viele Aussagen aus der Gleichstromlehre, wie das Ohmsche Gesetz, auf Wechselströme übertragen werden. Die komplexe Wechselstromrechnung ist grundsätzlich auf sinusförmige Größen beschränkt. Dies stellt aber keine starke Einschränkung dar, da sich jede andere periodische Funktion nach dem Satz von Fourier als (unendliche) Summe von Sinusfunktionen darstellen lässt (vgl. [4], S.200).

Zur Einführung der komplexen Stromzeiger seien zunächst eine sinusförmige Spannung

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (1.1)$$

und ein sinusförmiger Strom

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (1.2)$$

mit der Periodendauer  $T \in \mathbb{R}$ , der Kreisfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , den Amplituden  $\hat{u} \in \mathbb{R}$  und  $\hat{i} \in \mathbb{R}$  sowie den Phasenverschiebungen  $\varphi_u \in [0, 2\pi)$  und  $\varphi_i \in [0, 2\pi)$  gegeben. Der Wert dieser Funktionen kann zu jedem Zeitpunkt durch einen Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt werden, der mit der Kreisfrequenz  $\omega$  gegen den Uhrzeigersinn um den

Ursprung rotiert. In Abbildung 1.1 ist ein solches Zeigerdiagramm für Spannung und

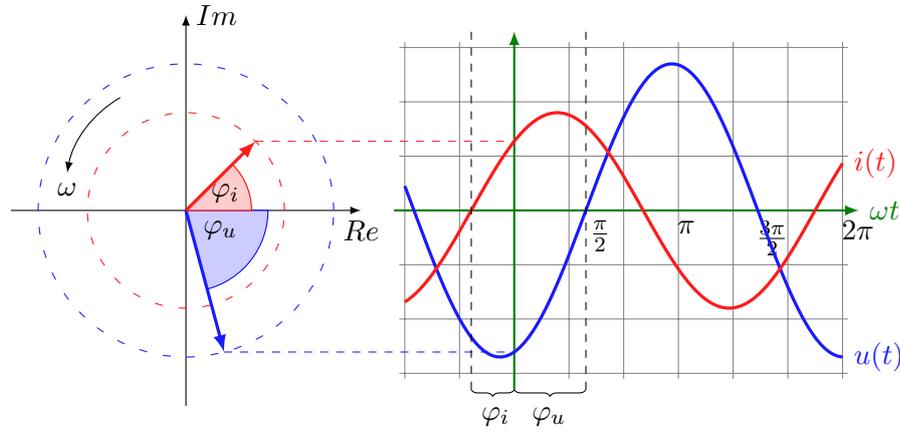


Abbildung 1.1: Zeigerdiagramm für sinusförmige Wechselgrößen von Spannung und Strom

Strom aufgetragen. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  beträgt der Winkel zwischen der reellen Achse und dem Zeiger gerade  $\varphi_u$  bzw.  $\varphi_i$ . Der Imaginärteil des Zeigers entspricht dabei dem Wert der Funktion zum Zeitpunkt  $t$ , dem Augenblickswert. Die Lage der beiden Zeiger zueinander ändert sich nicht, da beide mit der gleichen Frequenz rotieren. Die Länge des Zeigers entspricht immer der Amplitude des Signals  $\hat{u}$  bzw.  $\hat{i}$ , sodass sich die komplexen Drehzeiger

$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (1.3)$$

und

$$\underline{i}(t) = \hat{i} e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \cos(\omega t + \varphi_i) + j \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (1.4)$$

ergeben. Für Wechselspannung und Wechselstrom ist allerdings der Effektivwert von größerer Bedeutung als die Amplitude des Signals. Dieser stellt eine Beziehung der Wechselgrößen zu Gleichgrößen her. Innerhalb einer Periode liefert eine konstante Gleichspannung an einem elektrischen Bauteil die gleiche Energie wie eine Wechselspannung mit dem Effektivwert der Gleichspannung. Für den Strom gilt diese Aussage analog (vgl. [4], S.205). Der quadratische Mittelwert einer Wechselgröße innerhalb einer Periode gibt genau diesen Effektivwert an und kann für die sinusförmigen Ströme und Spannungen allgemein berechnet werden:

$$U := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u))^2 dt} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad (1.5)$$

$$I := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i))^2 dt} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}. \quad (1.6)$$

Ersetzt man die Amplitude in (1.3) und (1.4) durch den Effektivwert werden die kom-

plexen Effektivwert-Drehzeiger

$$\underline{U}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U^{Re}(t) + jU^{Im}(t) \quad (1.7)$$

und

$$\underline{I}(t) = I e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I^{Re}(t) + jI^{Im}(t) \quad (1.8)$$

definiert, die zu jedem Zeitpunkt  $t$  bis auf den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  identisch mit den in Abbildung 1.1 abgebildeten Zeigern und den zugehörigen sinusförmigen Wechselgrößen sind. Da der Effektivwert durch die Analogie zum Gleichstrom eine größere Bedeutung für den Wechselstrom hat als die Amplitude, wird diese Definition der Drehzeiger in der komplexen Wechselstromrechnung verwendet. Die Effektivwert-Drehzeiger geben weiterhin Augenblickswerte von Wechselgrößen an, die aber im Allgemeinen und insbesondere bei der Analyse von Netzwerken nicht benötigt werden, da vor allem die Phasenverschiebung der Größen zueinander interessant ist. Daher wird der Drehzeiger bei konstanter Frequenz durch einen festen Effektivwertzeiger ersetzt, der dem Anfangswert  $t = t_0$  des Drehzeigers entspricht. Die komplexen Festzeiger

$$\underline{U} = \frac{U(t)}{e^{j\omega t}} = U e^{j\varphi_u} = U^{Re} + jU^{Im} \quad \text{und} \quad (1.9)$$

$$\underline{I} = \frac{I(t)}{e^{j\omega t}} = I e^{j\varphi_i} = I^{Re} + jI^{Im} \quad (1.10)$$

sind die üblichen Darstellungen von Wechselgrößen in der komplexen Wechselstromrechnung und werden für die Betrachtungen an elektrischen Netzwerken verwendet. Bei der Erläuterung der elektrischen Grundelemente wird allerdings noch einmal auf den Zusammenhang zwischen den reellen Wechselgrößen und den komplexen Drehzeigern eingegangen. Die Einheit der komplexen Spannung ist wie im Reellen Volt [V] und die Einheit des komplexen Stroms Ampere [A] (vgl. [4], S. 200ff).

## 1.2 Elektrische Grundelemente

In der Analyse von linearen elektrischen Netzwerken spielen drei Grundelemente eine besondere Rolle. Durch den Ohmschen Widerstand, den Kondensator und die Spule können Ersatzschaltbilder von fast allen elektrischen Elementen erstellt werden, bei der die komplexe Wechselstromrechnung Anwendung findet. Dazu gehören zum Beispiel elektrische Leitungen oder Transformatoren, aus denen sich Verteilnetze hauptsächlich zusammensetzen und deren Ersatzschaltbilder in Abschnitt 1.3 erläutert werden. An dieser Stelle wird insbesondere auf den Zusammenhang der einzelnen Elemente mit den komplexen Zeigern für Spannung und Strom eingegangen, um komplexe Widerstände und das komplexe Ohmsche Gesetz einzuführen. Für Ausführungen zu den Funktionsweisen der einzelnen Bauteile vergleiche beispielsweise [4].

### 1.2.1 Der Ohmsche Widerstand

Das einfachste elektrische Bauteil stellt der Ohmsche Widerstand dar, der in elektrischen Netzwerken die Abhängigkeit zwischen Strom und Spannung angibt. Das Ohmsche Gesetz gilt auch für Wechselgrößen zu jeden Zeitpunkt ( $u(t) = R i(t)$ ), sodass für einen sinusförmigen Strom (1.10)

$$\underline{u}(t) = R \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) = R\sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (1.11)$$

gilt. Strom und Spannung unterscheiden sich nur in der Amplitude und damit im Effektivwert, für den demnach die Beziehung

$$U = RI \quad (1.12)$$

gilt. Man spricht davon, dass sich Strom und Spannung „in Phase“ befinden. Für die komplexen Zeiger kann außerdem

$$\underline{U} = R\underline{I} \text{ bzw. } \underline{I} = \frac{1}{R}\underline{U} \quad (1.13)$$

gefolgert werden, da sich nur der Effektivwert und nicht die Phase ändert. Der Kehrwert des *Ohmschen Widerstands* oder *Wirkwiderstands*

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.14)$$

wird als *Ohmscher Leitwert* oder *Wirkleitwert* bezeichnet. Abbildung 1.2 zeigt das Schaltsymbol des Ohmschen Widerstandes. Die Einheit des Ohmschen Widerstandes ist Ohm [ $\Omega$ ] und die des des Ohmschen Leitwerts Siemens [S] (vgl. [4], S.222ff).



Abbildung 1.2: Schaltsymbol des Widerstandes

### 1.2.2 Der Kondensator

Kondensatoren sind elektrische Bauelemente, die elektrische Ladung in einem elektrischen Feld speichern können. Die gespeicherte Ladung ist von der Spannung abhängig und wird als Kapazität  $C$  mit der Einheit Farad [F] bezeichnet. Sie können in verschiedenen Formen, wie als Platten-, Zylinder- oder Kugelkondensator auftreten. Für die Theorie wird ein idealer Kondensator mit einer reinen Kapazität (ohne durch einen ohmschen Widerstand ausgedrückte Verluste) angenommen, der in der Realität nicht auftritt. Kapazitive Elemente in einem Stromkreis führen immer zu einer Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Diese kann mit Hilfe eines idealen Kondensators im Wechselstromkreis bei sinusförmiger Anregung des Stroms (1.10) durch die

Beziehung

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \omega C \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) = \omega C \sqrt{2} U \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.15)$$

hergeleitet werden. Die Phase des Stroms ist im Vergleich zur Spannung also um  $\frac{\pi}{2}$  nach links verschoben. Durch Ableiten der komplexen Drehzeiger

$$\underline{I}(t) = C \frac{d\underline{U}(t)}{dt} = j\omega C U e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad (1.16)$$

wird diese Phasenverschiebung ebenfalls deutlich, da die Multiplikation mit der komplexen Einheit  $j$  zu einer Drehung des Zeigers um  $\frac{\pi}{2}$  führt. In diesem Fall spricht man davon, dass der Strom der Spannung um  $90^\circ$  vorausschlägt. Für den Effektivwert folgt aus Gleichung (1.15) die Beziehung

$$I = \omega C U \quad (1.17)$$

und für den komplexen Festzeiger gilt:

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U} \text{ bzw. } \underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}. \quad (1.18)$$

Aus dieser Gleichung ist bereits eine Ähnlichkeit zum Ohmschen Gesetz im Reellen zu erkennen. In Analogie zum Wirkwiderstand und zum Wirkleitwert werden daher für den Kondensator ein Blindleitwert

$$B_C := \omega C \quad (1.19)$$

mit der Einheit Siemens [S] und ein Blindwiderstand

$$X_C := -\frac{1}{\omega C} \quad (1.20)$$

mit der Einheit Ohm [ $\Omega$ ] definiert. Abbildung 1.3 zeigt das Ersatzschaltbild dieses elektrischen Elementes (vgl. [4], S.225ff).



Abbildung 1.3: Schaltsymbol des Kondensators

### 1.2.3 Die Spule

Wechselstrom erzeugt in elektrischen Leitern ein elektromagnetisches Feld, das diesen umgibt. Durch die Aufwicklung von Leitern zu einer Spule kann ein besonders starkes elektromagnetisches Feld erzeugt werden, sodass das elektrische Bauelement der Spule in elektrischen Netzen als das Magnetfeld erzeugende Element verwendet wird. Diese können wie der Kondensator in unterschiedlicher Form, wie zum Beispiel mit oder ohne

Eisenkern, realisiert werden. Die Eigenschaften des erzeugten Magnetfeldes sind in der elektrischen Induktivität  $L$  mit der Einheit Henry [H] zusammengefasst. Auch hier wird ähnlich wie beim Kondensator für die Theorie eine ideale Spule mit reiner Induktivität angenommen, die im Stromkreis die Beziehung zwischen Spannung und Strom

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \omega C \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_u) = \omega C \sqrt{2} I \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.21)$$

hervorruft. In diesem Fall führt eine sinusförmige Anregung des Stroms dazu, dass eine Spannung induziert wird, die im Vergleich zum Strom um  $\frac{\pi}{2}$  nach links verschoben ist. Auch hier kann der komplexe Drehzeiger des Stromes abgeleitet werden

$$\underline{U}(t) = C \frac{d\underline{I}(t)}{dt} = j\omega L U e^{j(\omega t + \varphi_i)}. \quad (1.22)$$

Die Spannung eilt hier also dem Strom um  $90^\circ$  voraus.

Die Gleichungen für den Effektivwert

$$U = \omega L I \quad (1.23)$$

und den komplexen Festzeiger

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} \text{ bzw. } \underline{I} = \frac{1}{j\omega L} \underline{U} = -j \frac{1}{\omega L} \underline{U}. \quad (1.24)$$

gelten genau umgekehrt wie bei den Gleichungen des Kondensators und die Definitionen des Blindwiderstands

$$X_L := \omega L \quad (1.25)$$

und des Blindleitwerts

$$B_L := -\frac{1}{\omega L} \quad (1.26)$$

der Spule mit den entsprechend gleichen Einheiten ergeben sich daraus auf dieselbe Art und Weise. Abbildung 1.4 zeigt das Ersatzschaltbild (vgl. [4], S.223ff).



Abbildung 1.4: Schaltsymbol der Spule

#### 1.2.4 Der komplexe Widerstand

Wie bereits erwähnt, wird bei der Herleitung der Gleichungen (1.18) und (1.24) von idealen Bauelementen ausgegangen. In der Realität treten solche idealen Kondensatoren und Spulen allerdings nicht auf, da reale Bauelemente immer verlustbehaftet sind und damit einen inneren Widerstand besitzen. Ideale Bauelemente werden allerdings für

Ersatzschaltbilder verwendet, die sich aus reinen Kapazitäten, Induktivitäten und Widerständen zusammensetzen.

Um Schaltungen und Netzwerke, die durch Ersatzschaltbilder und elektrische Modelle aus idealen Kondensatoren, Spulen und Wirkwiderständen bestehen, mit der komplexen Wechselstromrechnung analysieren zu können, ist es sinnvoll einen komplexen Widerstand und einen komplexen Leitwert zu definieren, der sich aus den vorgestellten Größen zusammensetzt. Das Ohmsche Gesetz besitzt auch für Wechselgrößen unter der folgenden Definition seine Gültigkeit.

**Definition 1.2.1** (Das ohmsche Gesetz für Wechselgrößen). *Es seien  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  komplexe Festzeiger der sinusförmigen Wechselgrößen  $u(t)$  und  $i(t)$ . Dann gilt*

$$\underline{U} = (R + jX)\underline{I} \text{ bzw. } \underline{I} = (G - jB)\underline{U}. \quad (1.27)$$

Der komplexe Widerstand (Impedanz) ist definiert als

$$\underline{Z} := R + jX \quad (1.28)$$

und der komplexe Leitwert (Admittanz) als

$$\underline{Y} := G - jB = \frac{1}{\underline{Z}}. \quad (1.29)$$

Das negative Vorzeichen vor dem Blindleitwert  $B$  ist dabei durch die Beziehung

$$X = -\frac{1}{B}$$

begründet, das wie bei der Herleitung von Kondensator und Spule hervorgeht, aus dem Kehrwert der komplexen Einheit

$$\frac{1}{j} = -j$$

resultiert. Die Einheit des komplexen Widerstandes ist Ohm  $[\Omega]$  und als Schaltsymbol wird das Symbol des ohmschen Widerstandes aus Abbildung 1.2 verwendet (vgl. [4], S.263ff).

### 1.2.5 Die komplexe Scheinleistung

In der reellen Gleichstromrechnung ist die Leistung durch das Produkt aus Strom und Spannung

$$P = UI \quad (1.30)$$

mit der Einheit Watt  $[W]$  definiert. In der komplexen Wechselstromrechnung kann die Leistung nicht ganz analog dazu definiert werden, da die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom beachtet werden muss. Die komplexe Scheinleistung  $S$  wird daher

als Produkt der komplexen Spannung mit dem komplex konjugierten Wert des Stromes

$$\begin{aligned}
 \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* \\
 &= U e^{j\varphi_u} I e^{-j\varphi_i} \\
 &= UI e^{j\varphi_u - \varphi_i} \\
 &= UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) + jUI \sin(\varphi_u - \varphi_i)
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

definiert. Dabei werden auch hier die Festzeiger verwendet, da der schwingende Anteil nur in seltenen Fällen von Bedeutung ist. Diese Definition ist allerdings durch den Augenblickswert der Leistung zum Zeitpunkt  $t$

$$p(t) = u(t)i(t), \tag{1.32}$$

dem Produkt der Augenblickswerte von Spannung und Strom begründet. Eine genauere Betrachtung dieser Funktion erklärt sowohl den Real-, als auch den Imaginärteil der Scheinleistung. Der Realteil der Scheinleistung  $UI \cos(\varphi_u - \varphi_i)$  entspricht dabei gerade dem Mittelwert der Funktion  $p(t)$ . Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)) \tag{1.33}$$

kann die Funktion in einen konstanten und einen periodischen Teil aufgeteilt werden:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \hat{u} \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i) \\
 &= \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} (\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)) \\
 &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} (\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)).
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Der Mittelwert ist als das Integral der Funktion über eine Periode definiert und ist damit für den zweiten, periodischen Teil gleich 0. Dieser ist damit durch den ersten Summanden bestimmt und wird als Wirkleistung

$$P := UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) \tag{1.35}$$

bezeichnet, weil dadurch die tatsächlich nutzbare Leistung bestimmt ist. Dieser entspricht gerade dem Realteil der durch Gleichung (1.31) definierten Scheinleistung. Der Imaginärteil der Scheinleistung

$$Q := UI \sin(\varphi_u - \varphi_i) \tag{1.36}$$

wird als Blindleistung bezeichnet und kann anschaulich durch zusätzliche Umformungen von (1.34) unter Verwendung einer weiteren trigonometrischen Beziehung

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \tag{1.37}$$

erklärt werden:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= P - UI \cos(2(\omega t + \varphi_u) - \underbrace{(\varphi_u - \varphi_i)}_{=\varphi}) \\
 &= P - UI \cos(2(\omega t + \varphi_u) \cos(\varphi)) - UI \sin(2(\omega t + \varphi_u) \sin(\varphi)) \\
 &= P(1 - \cos(2(\omega t + \varphi_u))) - Q \sin(2(\omega t + \varphi_u))
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Bei einer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung um  $90^\circ$ , wie es bei idealen Spulen und Kondensatoren der Fall ist, d.h.  $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$ , ist die Wirkleistung  $P = 0$  und der erste Term in Gleichung (1.38) fällt weg. Die Leistung schwingt dann mit Mittelwert 0 zwischen  $-UI$  und  $+UI$  hin und her, da

$$Q = UI \sin(\pm \frac{\pi}{2}) = \pm UI$$

gilt. In diesem Fall ist keine nutzbare Energie im System vorhanden und es wird nur Blindleistung erzeugt (vgl. [5], S. 138ff).

Obwohl die Blindleistung zunächst keinen praktischen Nutzen liefert, ist sie in elektrischen Netzen durch kapazitive und induktive Wirkungen von Leitungen, Transformatoren und auch Erzeugern und Verbrauchern immer vorhanden. Deshalb muss das System für diese zusätzliche Belastung ausgelegt sein. Während kleinere Verbraucher und Haushalte nicht zusätzlich für die Blindleistung bezahlen müssen, da diese schwer zu bemessen ist, müssen große Verbraucher diese bei Netzanschluss angeben und vergüten (vgl. [6], S. 202).

Wenn im Folgenden von der Leistung gesprochen wird, ist immer die komplexe Scheinleistung gemeint, die sich aus Wirk- und Blindleistung zusammensetzt. Die Einheit von Wirk-, Blind- und Scheinleistung ist per Definition als Produkt von Spannung und Strom, das Produkt aus Volt und Ampere. Um diese drei Größen besser unterscheiden zu können, werden allerdings in der Regel verschiedene Einheitsbezeichnungen angegeben. Die Wirkleistung wird wie die Leistung in der Gleichstromrechnung in der Einheit Watt [W], die als Produkt von Volt und Ampere definiert ist, angegeben, die Blindleistung in „volt ampere reactive“ [var] und die Scheinleistung in Voltampere [VA].

### 1.3 Elektrische Übertragungsnetzte

Das deutsche Stromnetz ist, wie bereits in der Einleitung erwähnt, in verschiedene Spannungsebenen unterteilt. Die Netze werden auf allen Spannungsebenen, wie weltweit die meisten elektrischen Übertragungsnetzte, mit 50 Hz-Drehstrom betrieben, der sich aus drei zueinander phasenverschobenen Wechselströmen zusammensetzt. Bevor anschließend die Funktionsweise des Drehstroms genauer erläutert wird, geht der folgende Abschnitt auf den Aufbau des deutschen Stromnetzes und die Verbraucher und Erzeuger in den einzelnen Verteilnetzen ein. Schließlich werden weitere Elemente des Übertragungsnetzes

anhand ihrer Ersatzschaltbilder beschrieben. Dazu gehören Freileitungen und Kabel zur Übertragung der Energie, sowie Transformatoren zur Umwandlung der Spannung zwischen verschiedenen Spannungsebenen. Die Ersatzschaltbilder führen zu vereinfachten stationären Gleichungen für die Bauelemente, die in den Lastflussgleichungen verwendet werden. Eine genaue Herleitung der Ersatzschaltbilder kann in Standardwerken zur elektrischen Energieversorgung wie [7] und [8] nachvollzogen werden.

### 1.3.1 Aufbau des deutschen Stromnetzes

Abbildung 1.5 zeigt den Aufbau des deutschen Stromnetzes in den verschiedenen Spannungsebenen. Die Aufteilung in ein Übertragungs- und ein Verteilnetz ist dabei historisch bedingt, da es auf eine zentrale Energieversorgung durch große Kraftwerke (Kohle, Atomenergie etc.) ausgerichtet war. Die Energieübertragung bei hohen Spannungen ist deutlich weniger verlustbehaftet. Daher wird die erzeugte Energie auf der Höchstspannungsebene über große Strecken transportiert und über die Hoch-, Mittel- und Nieder Spannungsebenen an die Verbraucher verteilt. Während insbesondere Nieder- und Mittelspannungsnetze lange ausschließlich zur Verteilung der in höheren Spannungsebenen erzeugten Leistung zu den Verbrauchern dienten, wird inzwischen durch die zunehmend dezentrale Energieversorgung auf allen Spannungsebenen auch Leistung in das Netz eingespeist (vgl. [7], S. 399ff).

Je nach Spannungsebene des Netzwerks setzen sich Verbraucher und Erzeuger unterschiedlich zusammen, wie in Abbildung 1.5 nachvollzogen werden kann. In Niederspannungsnetzen sind einzelne Haushalte sowie kleinere Industriebetriebe die häufigsten Verbraucher. In Mittelspannungsnetzen bilden die über Transformatoren bzw. Umspannwerke angeschlossenen Niederspannungsnetze eine Gesamtlast. Außerdem werden größere industrielle Anlagen direkt an das Mittelspannungsnetz angeschlossen. Im Hochspannungsnetz sind die Mittelspannungsnetze als Gesamtlasten und große Industrielle Abnehmer hauptsächlich als Verbraucher zu betrachten. Transformatoren werden bei der Analyse eines Netzes teilweise nur implizit berücksichtigt, wenn die gesamte angeschlossene Leistung des Netzes der niedrigeren Spannungsebene als Netzknoten verwendet wird. Zu den dezentralen Erzeugern zählen unter anderem Blockheizkraftwerke wie Biogasanlagen oder Kraft-Wärme-Kopplungs-Anlagen, Photovoltaik, Windenergie und kleinere Wasserkraftwerke. Die Anlagen werden je nach Größe, also der erzeugten Leistung, an die jeweilige Spannungsebene angeschlossen (vgl. ebd.).

In den Verteilnetzen wird der Großteil der Leistung weiterhin nicht dezentral erzeugt, sondern aus der höheren Spannungsebene bezogen. Das Umspannwerk stellt daher einen besonderen Knoten im Netz dar, da hier die Leistung der höheren Spannungsebene dem Netz zugeführt wird. Diese ist damit die Differenz zwischen verbrauchter und erzeugter Leistung innerhalb des Netzes (vgl. ebd.).

Wie genau die Verbraucher und Erzeuger über den in die Netzknoten fließenden Strom in die Lastflussberechnung eingehen, wird in Abschnitt 1.4.2 beschrieben.

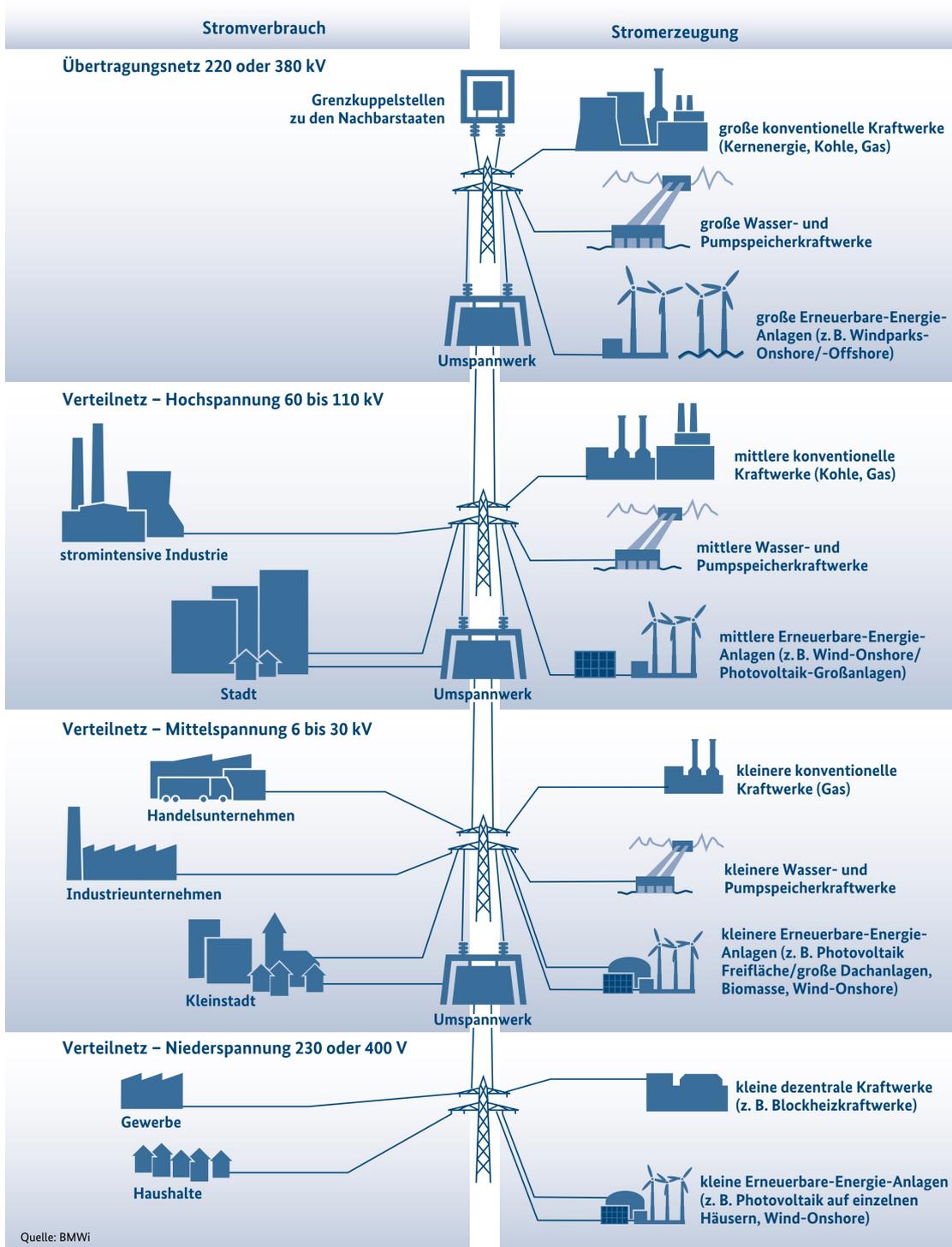


Abbildung 1.5: Aufbau des deutschen Stromnetzes [9]

### 1.3.2 Drehstrom

Drehstrom oder Dreiphasenwechselstrom entsteht durch drei Spulen, die im Kreis um  $120^\circ$  versetzt zueinander angeordnet sind und einem im Zentrum dieser Spulen rotierenden elektromagnetischen Feld, das auf verschiedene Weise erzeugt werden kann. Im einfachsten Fall ist dies ein rotierender Dauermagnet. Auf die genaue Funktionsweise von Drehstromgeneratoren und -motoren wird an dieser Stelle nicht eingegangen und auf die Fachliteratur, wie zum Beispiel [7] oder [8] verwiesen. Durch diese Anordnung bilden sich drei um  $120^\circ$  zeitlich versetzte Wechselspannungen, die zu drei zeitlich versetzten Einphasensystemen führen. Sowohl die Verschaltung der Spulen zur Erzeugung von Drehstrom, als auch die Drehstromlasten können stern- oder dreiecksförmig verschaltet werden. In Abbildung 1.6 sind an einen im Stern verschalteten Erzeuger (links) ein im Stern und ein im Dreieck geschalteter Drehstromverbraucher angeschlossen.

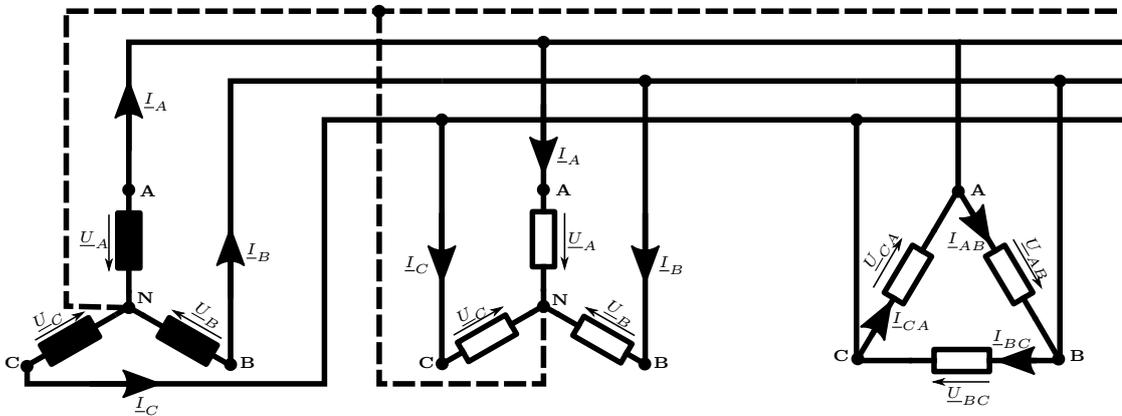


Abbildung 1.6: Verschaltung von Drehstrom im Stern und im Dreieck (eigene Grafik, angelehnt an [8], S.18f)

Die Spannungen  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$  und  $\underline{U}_C$  zwischen den Knotenpunkten der Schaltung  $A$ ,  $B$  und  $C$  und dem Sternpunkt  $N$  werden als Stern- oder Phasenspannungen bezeichnet. Im Neutralleiter fließt bei symmetrischem Betrieb kein Strom, sodass eine Sternschaltung auch ohne Neutralleiter realisiert werden kann. Deshalb ist dieser in Abbildung 1.6 als gestrichelte Linie dargestellt. Symmetrischer Betrieb heißt in diesem Fall, dass sowohl auf der Erzeugerseite, als auch auf der Verbraucherseite Spannungen genau im Winkel  $120^\circ$  zueinander verschoben sind und den gleichen Betrag aufweisen, also die komplexen Widerstandswerte der Spulen und der Lasten jeweils gleich sind. In der Dreiecksschaltung entspricht die Spannung, die zwischen zwei Knotenpunkten abfällt, genau der Differenz der Phasenspannungen zwischen diesen Knoten:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{AB} &= \underline{U}_A - \underline{U}_B \\ \underline{U}_{BC} &= \underline{U}_B - \underline{U}_C \\ \underline{U}_{CA} &= \underline{U}_C - \underline{U}_A.\end{aligned}$$

Diese Spannungen werden als Dreiecks- oder Leiter-Leiter-Spannungen bezeichnet, da sie auch in einer Sternschaltung die Spannungsdifferenz zwischen den einzelnen Leitern angeben. Im symmetrischen Betrieb gilt für die Phasenspannungen mit  $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_A \underline{a}^2, \quad (1.39)$$

$$\underline{U}_C = \underline{U}_A \underline{a}, \quad (1.40)$$

und für die Phasenströme

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A \underline{a}, \quad (1.41)$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_A \underline{a}^2. \quad (1.42)$$

Im Normalbetrieb kann für elektrische Netze eine symmetrische Betriebsführung angenommen werden, da alle Erzeuger und Verbraucher symmetrisch an das Netz angeschlossen werden. Auf Grund der in diesem Fall einfachen Beziehung der einzelnen Phasenspannungen und Phasenströme zueinander ist es ausreichend sich bei den weiteren Ausführungen auf eine einphasige Betrachtung mit der Phasenspannung  $\underline{U}_A$  und dem Phasenstrom  $\underline{I}_A$  zu beschränken. Der Zusammenhang dieser Phasenspannung zur Leiter-Leiter-Spannung ist durch

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3}U_A e^{j(\varphi_{u_A} + \frac{\pi}{6})} \quad (1.43)$$

gegeben. Damit gilt insbesondere für die Beträge der Leiter-Leiter-Spannungen:

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = \sqrt{3}U_A. \quad (1.44)$$

Der Faktor  $\sqrt{3}$  wird dabei als Verkettungsfaktor bezeichnet.

Da die Leiter-Leiter-Spannung sowohl in der Dreiecks-, als auch in der Sternschaltung als einzige in jedem Fall direkt gemessen werden kann, wird ihr Betrag als Spannungsangabe für elektrische Netze verwendet. Die Spannungswerte eines 110 kV-Hochspannungsnetzes oder eines 20 kV-Mittelspannungsnetzes beziehen sich also auf die Beträge der Leiter-Leiter-Spannungen. Die 230 V, die im Haushalt an der Steckdose anliegen, beziehen sich hingegen auf die Phasenspannung, da diese nur an eine Phase des Niederspannungsnetzes angeschlossen sind. Im Gesamten wird für die Spannungsangabe des Niederspannungsnetzes auch die Leiter-Leiter-Spannung von  $400 \text{ V} \approx \sqrt{3} \cdot 230 \text{ V}$  verwendet (vgl. [7], S. 15ff).

Der Vorteil in der Verwendung von Drehstrom liegt insbesondere darin, dass im Vergleich zum einphasigen Wechselstrom mit weniger Leitern eine höhere Leistung übertragen werden kann. Dies ist bei einer einphasigen Betrachtung eines Dreiphasennetzes zu beachten. Die Leistung eines Dreiphasensystems berechnet sich aus der Summe der Leistungen der einzelnen Phasen und kann bei symmetrischem Betrieb direkt vereinfacht werden, da

$\underline{a}^3 = 1$  ist:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^* \\ &= \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_A \underline{a}^2 \underline{I}_A^* \underline{a} + \underline{U}_A \underline{a} \underline{I}_A^* \underline{a}^2 \\ &= 3 \underline{U}_A \underline{I}_A^*.\end{aligned}\tag{1.45}$$

Häufig wird die Leistungsgleichung mit dem Betrag der Leiter-Leiter-Spannung  $U$  und der Phase der Phasenspannung  $\varphi_u := \varphi_{u_A}$  sowie dem Phasenstrom  $\underline{I} := \underline{I}_A$  ausgedrückt. Gleichung (1.45) wird dann zu

$$\begin{aligned}\underline{S} &= 3 \underline{U}_A \underline{I}_A^* \\ &= 3 U_A I_A e^{j\varphi_u - \varphi_i} \\ &= \sqrt{3} U I e^{j\varphi_u - \varphi_i} \\ &= \sqrt{3} U I \cos(\varphi_u - \varphi_i) + j \sqrt{3} U I \sin(\varphi_u - \varphi_i) \\ &= P + jQ\end{aligned}\tag{1.46}$$

umgeformt. Mit der komplexen Größe  $\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$ , die in dieser Form keine Entsprechung im Dreiphasensystem hat, sondern sich aus komplexer Leiter- und Phasenspannung zusammensetzt, wird dann kompakt die Gleichung

$$\underline{S} = \sqrt{3} \underline{U} \underline{I}\tag{1.47}$$

verwendet (vgl. [10], S. 41f.).

### 1.3.3 Elektrische Leitungen

Elektrische Leitungen können entweder durch unterirdische Kabel oder durch oberirdische Freileitungen realisiert werden. Dabei handelt es sich um Drehstromleitungen, die aber aus oben genannten Gründen einphasig betrachtet werden. Sowohl Freileitungen als auch Kabel können für die Lastflussberechnung von Verteilnetzen als „elektrisch kurze“ Leitungen betrachtet werden, da dies für die stationäre Betrachtung bei 50 Hz für „praktisch alle Energieleitungen“ eine berechtigte Vereinfachung darstellt ([8], S.180). Die Eigenschaften der Leitung werden dabei durch verschiedene komplexe Bauteile angegeben. Der von der Frequenz und der Leiterquerschnittsfläche abhängige Wirkwiderstand  $R$  gibt die Verluste der Leitung an. Der im Leiter fließende elektrische Strom induziert außerdem ein elektrisches und ein magnetisches Feld. Diese sind vom Durchmesser und der Geometrie der Leitungen abhängig und werden durch die Kapazität  $C$  und die Induktivität  $L$  beschrieben. Der Wirkleitwert  $G$  gibt die Verluste des elektrischen Feldes an, ist aber in der Regel vernachlässigbar klein. Diese Größen sind zudem alle von der Länge der Leitung abhängig. Im so genannten II-Ersatzschaltbild in Abbildung 1.7 für eine elektrisch kurze Leitung finden sich diese Größen wieder.

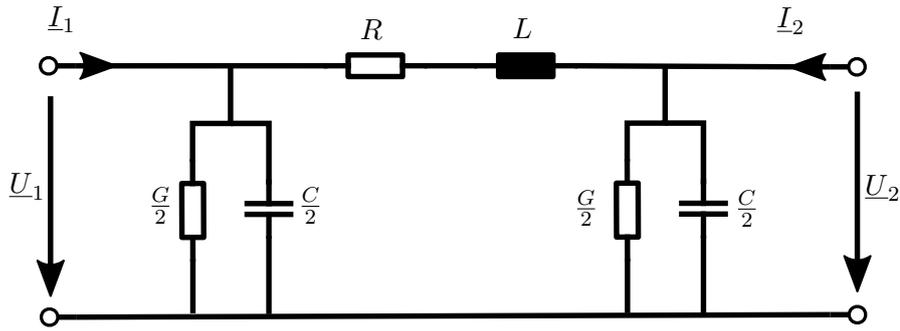


Abbildung 1.7: Ersatzschaltbild einer elektrisch kurzen Leitung, (eigene Grafik, angelehnt an [8], S. 178)

Das Längsglied des Ersatzschaltbildes wird dabei in der Regel als Impedanz

$$\underline{Z}_L = R + j\omega L \quad (1.48)$$

und die Querglieder als Hälfte der Admittanz

$$\underline{Y}_L = G + j\omega C \quad (1.49)$$

angegeben. Damit kann die Beziehung zwischen Spannung und Strom zwischen den beiden Endpunkten der Leitung durch

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{Y}_L}{2}\right) & -\frac{1}{\underline{Z}_L} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_L} & \left(\frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{Y}_L}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

ausgedrückt werden (vgl. [8], S. 171ff).

### 1.3.4 Transformatoren

Um von einer Spannungsebene in eine andere zu wechseln, werden Transformatoren verwendet. Die Eingangsspannung auf der Primärseite des Transformator  $\underline{U}_s$  wird auf die Spannung auf der Sekundärseite  $\underline{U}_p$  transformiert. Dies wird durch aufgewickelte Spulen realisiert, wobei das Verhältnis der Windungszahlen der beiden Spulen bei einem idealen Transformator dem Verhältnis von Eingangs- zur Ausgangsspannung entspricht. Ideale Transformatoren existieren in der Realität nicht, sondern werden vor allem für theoretische Betrachtungen verwendet. In Ersatzschaltbildern realer Transformatoren wird zur Vereinfachung immer das Übersetzungsverhältnis des idealen Transformators angegeben und die Verluste werden durch zusätzliche komplexe Widerstände dargestellt. Dies ist einphasig das Verhältnis der Windungszahlen zueinander oder bei Drehstromtransformatoren ein Äquivalent dazu.

Drehstromtransformatoren können dabei als Zwei- oder Dreiwicklungstransformatoren

gebaut werden, deren Primär- und Sekundärseite im Stern oder im Dreieck verschaltet sein können. Zusätzlich kommt eine Zickzackschaltung in Frage, auf die hier nicht näher eingegangen wird. Außerdem kann eine Phasenverschiebung der Primär- und der Sekundärspannung mit so genannten Phasenverschiebertransformatoren herbeigeführt werden, um die Blindleistung in einem elektrischen Netzwerk zu beeinflussen. Diese Phasenverschiebung kann ebenfalls über das Übersetzungsverhältnis  $\underline{\ddot{u}} \in \mathbb{C}$  angegeben werden, das damit im Allgemeinen ein komplexer Wert ist, bei dem der Betrag das Verhältnis der Windungszahlen angibt und die Phase die durch den Transformator hervorgerufene Phasenverschiebung (vgl. [7], S. 219ff).

Die Darstellung eines Drehstromtransformators mit komplexer Windungszahl mit den realen Verlusten durch ein  $\Pi$ -Ersatzschaltbild ist möglich, wenn die Spannung und der Strom auf der Sekundärseite auf die Spannung und den Strom der Primärseite umgerechnet werden:

$$\underline{U}'_s = \frac{U'_s}{\underline{\ddot{u}}} \quad \text{und} \quad \underline{I}'_s = \frac{I'_s}{\underline{\ddot{u}}^*}. \quad (1.51)$$

Bei einem idealen Transformator wären die so genannten gestrichenen Größen  $U'_s$  und  $I'_s$  dann gleich  $U_p$  und  $I_p$ . Die Differenz der Größen beschreibt also gerade die Verluste des Transformators. Das  $\Pi$ -Ersatzschaltbild dazu ist in Abbildung 1.8 dargestellt. Die darin vorkommenden Admittanzen werden über das  $T$ -Ersatzschaltbild hergeleitet, in dem die Wicklungs-, Eisen- und Streuverluste, die als feste Parameter eines Transformators bekannt sind, explizit erkennbar sind. Die einzelnen Admittanzen  $\underline{Y}'_{ps}$  und  $\underline{Y}_p$  und  $\underline{Y}'_s$  setzen sich daher alle aus diesen Verlusten zusammen und können nicht jeweils einer bestimmten Verlustart zugeordnet werden. In  $\underline{Y}'_s$  und  $\underline{Y}'_{ps}$  ist auch das Übersetzungsverhältnis  $\underline{\ddot{u}}$  zu berücksichtigen, sodass diese ebenfalls als gestrichene Größen angegeben werden.

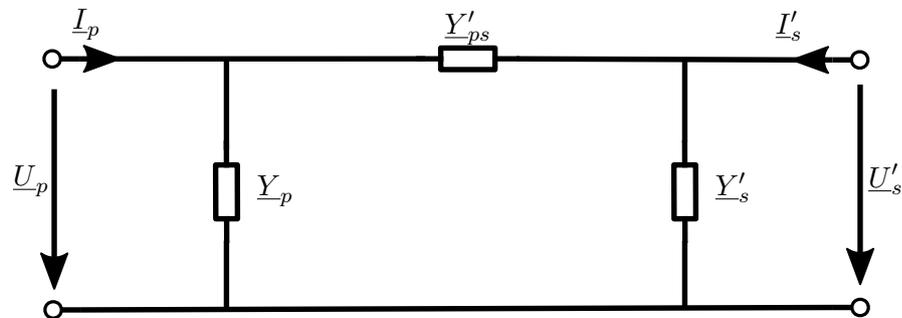


Abbildung 1.8: Ersatzschaltbild eines Transformators, (eigene Grafik, angelehnt an [7], S. 257)

Die Beziehung zwischen Spannung und Strom der Primär- und der umgerechneten Sekundärseite wird mit einer Matrix durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}'_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_p + \underline{Y}'_{ps} & -\underline{Y}'_{ps} \\ -\underline{Y}'_{ps} & \underline{Y}'_s + \underline{Y}'_{ps} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}'_s \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

beschrieben. Durch Ersetzen der gestrichenen Größen von Strom und Spannung auf der Sekundärseite wird diese zu Gleichung

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_p + \underline{Y}'_{ps} & -\ddot{u} \underline{Y}'_{ps} \\ -\ddot{u}^* \underline{Y}'_{ps} & |\ddot{u}|^2 (\underline{Y}'_s + \underline{Y}'_{ps}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}_s \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

umgeformt, in der die ursprünglichen Größen für Spannung und Strom vorkommen. Zu dieser Gleichung gibt es bei Phasenschiebertransformatoren kein entsprechendes  $\Pi$ -Ersatzschaltbild, da die Einträge auf der Nebendiagonalen nicht identisch sind. Wenn sonst  $\ddot{u} := \ddot{u} = \ddot{u}^*$  gilt, ist die Darstellung durch ein  $\Pi$ -Ersatzschaltbild mit den Umformungen

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{Y}}'_{ps} &= \ddot{u} \underline{Y}'_{ps} \\ \tilde{\underline{Y}}_p &= \underline{Y}_p + (1 - \ddot{u}) \underline{Y}'_{ps} \\ \tilde{\underline{Y}}'_s &= \ddot{u}^2 \underline{Y}'_s + \ddot{u}(\ddot{u} - 1) \underline{Y}'_{ps} \end{aligned} \quad (1.54)$$

möglich (vgl. [7], S.255ff). Im verwendeten Mittelspannungsnetz ist der Transformator im Umspannwerk ein Phasenschiebertransformator.

Das Schaltsymbol des Transformators in elektrischen Netzen zeigt Abbildung 1.9.

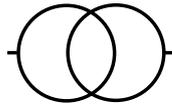


Abbildung 1.9: Schaltsymbol des Transformators

## 1.4 Lastflussberechnung

Die Lastflussberechnung für elektrische Netzwerke basiert auf dem Knotenpotentialverfahren, das aus der Theorie für Gleichstromnetzwerke mit reellen Größen auf die Wechselstromrechnung mit komplexen Größen übertragen werden kann. Ein Vorteil dieses Verfahrens ist eine dünn besetzte Admittanzmatrix, die direkt aus dem Netzersatzschaltplan aufgestellt werden kann, wenn die oben vorgestellten  $\Pi$ -Ersatzschaltbilder für Leitungen und Transformatoren verwendet werden. Lasten und Generatoren können anschließend über die Knotenströme leicht integriert werden. Die Herleitung des Knotenpotentialverfahrens für die Lastflussberechnung orientiert sich an der Herangehensweise von Oeding und Oswald (vgl. [7], S. 451ff).

### 1.4.1 Das Knotenpotentialverfahren

Grundlage für das Knotenpotentialverfahren bildet das 1. Kirchhoffsche Gesetz, die Knotenregel (vgl. [4], S.26). Sie besagt, dass in jedem Knotenpunkt eines elektrischen Netz-

werks die Summe aller zu- und abfließenden Ströme (Zweigströme) gleich 0 sein muss. In einem Knoten  $k$  mit  $n$  Zweiströmen gilt also

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (1.55)$$

Für das Knotenpotentialverfahren ist zunächst ein Bezugsknoten 0 festzulegen, sodass die Spannung  $\underline{U}_k$  in einem Knoten  $k$  immer die Spannung zwischen dem Knoten und dem Bezugsknoten angibt. In elektrischen Übertragungsnetzen wird in der Regel die Erde als Bezugsknoten gewählt (vgl. [11], S. 81f.). Die Idee des Knotenpotentialverfahrens wird zunächst an zwei Knoten eines Netzwerks mit insgesamt  $K \in \mathbb{N}$  Knoten erläutert. In Abbildung 1.10 ist ein solcher Netzausschnitt dargestellt.

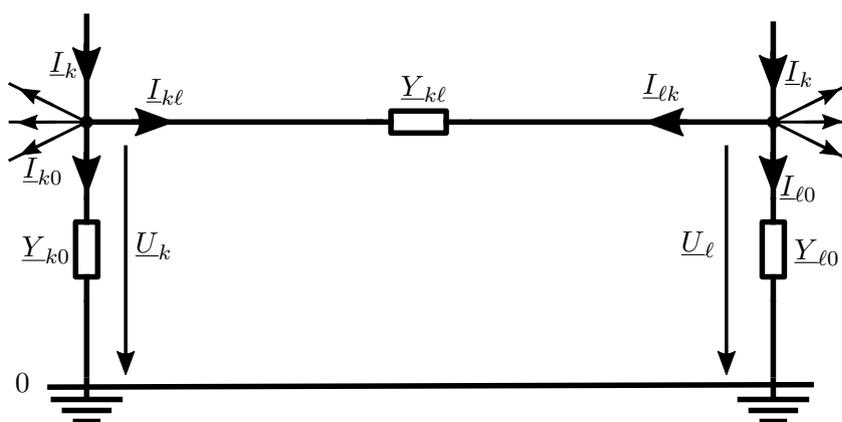


Abbildung 1.10: Netzausschnitt zwischen den Knoten  $k$  und  $l$  und dem Bezugspotential (eigene Grafik, angelehnt an [7], S. 453)

Für die Verbindung zwischen den beiden Knoten mit dem Bezugspotential wird dabei zunächst angenommen, dass diese durch ein  $\Pi$ -Ersatzschaltbild dargestellt werden kann. Mit der Spannung  $\underline{U}_{k\ell}$  und den Strom  $\underline{I}_{k\ell}$  zwischen den beiden Knoten gilt mit dem komplexen Ohmschen Gesetz (1.27):

$$\underline{I}_{k\ell} = \underline{Y}_{k\ell} \underline{U}_{k\ell} = \underline{Y}_{k\ell} (\underline{U}_k - \underline{U}_\ell) = -\underline{I}_{\ell k}. \quad (1.56)$$

Die Ströme zum Bezugspotential in den Knoten  $k$  und  $l$  werden durch

$$\underline{I}_{k0} = \underline{Y}_{k0} \underline{U}_k \quad \text{und} \quad \underline{I}_{\ell 0} = \underline{Y}_{\ell 0} \underline{U}_\ell \quad (1.57)$$

beschrieben. Die Knotenströme  $\underline{I}_k$  und  $\underline{I}_\ell$  werden im klassischen Knotenpotentialverfahren durch Stromquellen repräsentiert. Sie stellen keine Verbindung zu einem anderen Knoten dar, sondern berücksichtigen die durch Erzeuger und Verbraucher an das elektrische Netz angeschlossene Leistung und werden im nächsten Abschnitt genauer spezifiziert. Der Knotenstrom wird im Gegensatz zu allen anderen Strömen als in den

Knoten hineinfließend gewählt. Die Wahl der Stromrichtung ist dabei zunächst beliebig und muss erst hinterher bei der Interpretation der Vorzeichen beachtet werden.

In einem Netzwerk kann theoretisch jeder Knoten mit jedem anderen Knoten verbunden sein. Die Ströme zu anderen Knoten sind in Abbildung 1.10 durch Ströme angedeutet, die aus den Knoten  $k$  und  $\ell$  herausfließen und nicht mit einem Namen gekennzeichnet sind. Werden diese bei der Anwendung der Knotenregel allerdings zunächst vernachlässigt und damit nur die Verbindung zwischen zwei Knoten betrachtet, wird der Zusammenhang zu den Matrix-Gleichungen der elektrischen Leitung und des Transformators deutlich. In diesem Fall treffen sich in den Knoten  $k$  und  $\ell$  nur je drei Zweigströme, für die mit Anwendung der Knotenregel (1.55), sowie den Gleichungen (1.56) und (1.57) folgt:

$$\begin{aligned} -\underline{I}_k + \underbrace{\underline{Y}_{k0}\underline{U}_k}_{=I_{k0}} + \underbrace{\underline{Y}_{k\ell}(\underline{U}_k - \underline{U}_\ell)}_{=I_{k\ell}} &= 0 \\ -\underline{I}_\ell + \underbrace{\underline{Y}_{\ell0}\underline{U}_\ell}_{=I_{\ell0}} + \underbrace{\underline{Y}_{k\ell}(\underline{U}_\ell - \underline{U}_k)}_{=-I_{k\ell}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Dabei wird der Knotenstrom  $\underline{I}_k$  mit einem negativen Vorzeichen berücksichtigt, da dieser entgegengesetzt zu den anderen Strömen fließt. Die Gleichungen (1.58) können als Matrix-Vektor-Multiplikation umgeschrieben werden, die die Beziehung zwischen den Knotenspannungen und den Knotenströmen zweier Knoten beschreibt:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_k \\ \underline{I}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{Y}_{k\ell} + \underline{Y}_{k0}) & -\underline{Y}_{k\ell} \\ -\underline{Y}_{k\ell} & (\underline{Y}_{k\ell} + \underline{Y}_{\ell0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_k \\ \underline{U}_\ell \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

Die einzelnen Elemente einer elektrischen Leitung finden sich in dieser Matrix mit  $\underline{Y}_{k\ell} = \frac{1}{\underline{Z}_L}$  und  $\underline{Y}_{k0} = \underline{Y}_{\ell0} = \underline{Y}_L$  direkt wieder und die Matrix entspricht dann der Matrix aus Gleichung (1.50). Transformatoren mit reellem Übersetzungsverhältnis können mit den Umformungen (1.54) durch ein  $\Pi$ -Ersatzschaltbild dargestellt werden, sodass die umgeformten Admittanzen des Transformator mit  $\underline{Y}_{k\ell} = \tilde{\underline{Y}}'_{ps}$ ,  $\underline{Y}_{k0} = \tilde{\underline{Y}}'_p$  und  $\underline{Y}_{\ell0} = \tilde{\underline{Y}}'_s$  ebenfalls den Admittanzen in der Matrix aus Gleichung (1.59) entsprechen.

In den Gleichungen (1.58) wurde nur die Verbindung zwischen zwei Knoten betrachtet und die Ströme zu anderen Knoten vernachlässigt. Um diese zu berücksichtigen, wird die Annahme getroffen, dass jeder Knoten des Netzes mit jedem anderen Knoten verbunden sein kann. Damit sind bei Anwendung der Knotenregel in einem Knoten  $k$ , neben dem Knotenstrom  $\underline{I}_k$  und dem Strom zum Bezugsknoten  $\underline{I}_{k0}$ , die  $K - 1$  Ströme zu anderen Knoten zu berücksichtigen. Besteht keine Verbindung zwischen zwei Knoten, werden die entsprechenden Admittanzen gleich 0 gesetzt, sodass die Knotenregel (1.55) zusammen mit den Gleichungen (1.56) und (1.57) in jedem Knoten die Summe der  $K + 1$  Ströme bildet:

$$-\underline{I}_k + \underline{Y}_{k0}\underline{U}_k + \sum_{\ell=1, \ell \neq k}^K \underline{Y}_{k\ell}(\underline{U}_k - \underline{U}_\ell) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K. \quad (1.60)$$

Diese Gleichungen können mit

$$\underline{Y}_{kk} = \underline{Y}_{k0} + \sum_{\ell=1, \ell \neq k}^K \underline{Y}_{k\ell} \quad (1.61)$$

und

$$\underline{Y}_{k\ell} = \underline{Y}_{\ell k} \quad (1.62)$$

als Matrix-Vektor-Gleichung formuliert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} & \cdots & -\underline{Y}_{1K} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \cdots & -\underline{Y}_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\underline{Y}_{K1} & -\underline{Y}_{K2} & \cdots & \underline{Y}_{KK} \end{pmatrix}}_{:=\underline{Y}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_K \end{pmatrix}}_{:=\underline{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_K \end{pmatrix}}_{:=\underline{I}}. \quad (1.63)$$

Die Admittanzmatrix eines elektrischen Netzwerks wird im Folgenden immer durch  $\underline{Y} \in \mathbb{C}^{K \times K}$  beschrieben, die Knotenspannungen durch den Vektor  $\underline{U} \in \mathbb{C}^K$  und die Knotenströme durch  $\underline{I} \in \mathbb{C}^K$ . Dabei wurde vorausgesetzt, dass sich alle Verbindungen zwischen zwei Knoten durch ein  $\Pi$ -Ersatzschaltbild wie in Abbildung 1.10 darstellen lassen. In diesem Fall ist die Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  symmetrisch. Die Bedingung (1.62) gilt allerdings nicht, wenn im Netzwerk Phasenverschiebertransformatoren verbaut sind. Die Matrixdarstellung der Transformatorgleichung (1.53) aus Abschnitt 1.3.4 ist bei Phasenverschiebertransformatoren nicht symmetrisch, da in diesem Fall  $\underline{u} \neq \underline{u}^*$  gilt. Diese Matrix für die Beziehung von Spannung und Strom zwischen zwei Knoten kann aber durch weitere Umformungen ebenfalls in  $\underline{Y}$  berücksichtigt werden und einzig die Symmetrieeigenschaft der Admittanzmatrix geht verloren.

Die Eigenschaften eines elektrischen Netzwerks sind durch die Gleichung

$$\underline{Y} \underline{U} = \underline{I} \quad (1.64)$$

vollständig beschrieben (vgl. [7], S. 453ff). Die Knotenströme werden in der Lastflussberechnung durch zusätzliche Gleichungen für die Leistung, die in jedem Knoten angeschlossen ist, definiert.

## 1.4.2 Leistungsgleichung für Netzwerkknoten

Der dem Netz in einem Knoten  $k$  zugeführte oder entnommene Strom in einem Knoten wird durch die Spannung und die Leistung in diesem Knoten nach der Leistungsgleichung (1.47)

$$\begin{aligned} \underline{S}_i &= \sqrt{3} \underline{U}_i \underline{I}_i^* \text{ bzw.} \\ P_i + jQ_i &= \sqrt{3} \underline{U}_i e^{j\varphi_{u_i}} (\underline{I}_i^{Re} + j \underline{I}_i^{Im}) \end{aligned} \quad (1.65)$$

festgelegt. In der Literatur wird üblicherweise zwischen Einspeise- und Verbraucherknöten unterschieden. An den Verbraucherknöten wird Wirk- und Blindleistung der angeschlossenen Last angegeben, sodass auch von  $P, Q$ -Knöten gesprochen wird. Als Einspeiseknöten werden Knöten bezeichnet, in denen die Wirkleistung und der Betrag der Spannung vorgegeben sind (vgl. [7], S. 511ff). Diese so genannten  $P, U$ -Knöten sind allerdings für diese Arbeit nicht von Bedeutung, da in dem in Kapitel 4 analysierten realen Mittelspannungsnetzwerk auch in den Erzeugerknöten die Wirk- und die Blindleistung vorgegeben ist. Die übliche Unterscheidung zwischen Einspeise- und Verbraucherknöten ist nur der Vollständigkeit halber angegeben und wird in dieser Arbeit nicht mehr auf diese Weise verwendet.

Erzeuger und Verbraucher sind generell durch das Vorzeichen der Wirkleistung voneinander zu unterscheiden. Auch hier kann das Vorzeichen theoretisch beliebig gewählt werden, solange die Wahl zusammen mit der Wahl der Stromrichtung bei der Analyse beachtet wird. In Abbildung 1.11 sind ein Verbraucherknöten und zwei Erzeugerknöten mit jeweils unterschiedlichen Symbolen dargestellt, die die Wahl der Stromrichtung und des Vorzeichens der Leistung verdeutlichen. Der Pfeil zeigt dabei die Stromrichtung an, die als vom Erzeuger oder Verbraucher zum Netzknoten hin fließend gewählt wird. Bei positivem Vorzeichen des Stroms fließt dieser in Pfeilrichtung, bei negativem der Pfeilrichtung entgegen. Wie in Abbildung ebenfalls zu erkennen, ist die Wirkleistung negativ, wenn es sich um einen Verbraucher handelt und positiv, wenn ein Erzeuger angeschlossen ist. Sind an einem Knöten sowohl Verbraucher, als auch Erzeuger angeschlossen, wird die Leistung der beiden addiert, sodass der Knöten insgesamt entweder als Erzeuger (bei positiver Summe der Wirkleistungen) oder als Verbraucher (bei negativer Summe der Wirkleistungen) wirkt. Wenn die Blindanteile von Strom, Spannung und Leistung für einen Moment außer Acht gelassen werden, ist das Vorzeichen des Stroms damit bei positiver Spannung nach Gleichung (1.47) das gleiche wie das der Wirkleistung und der Strom fließt mit negativem Vorzeichen von Netzknoten zum Verbraucher und mit positivem Vorzeichen vom Erzeuger zum Netzknoten.

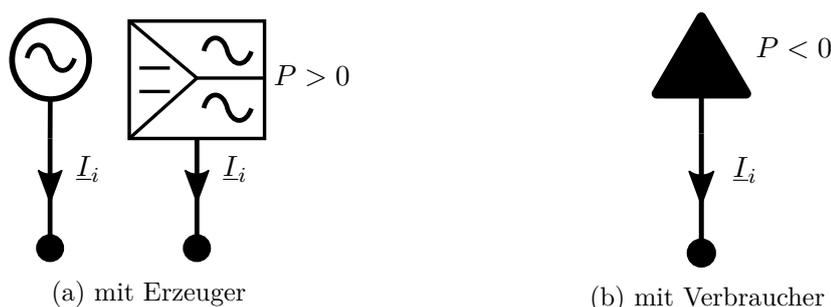


Abbildung 1.11: Netzknöten

Wie bereits in Abschnitt 1.3.1 erwähnt, stellt das Umspannwerk in Verteilnetzen einen besonderen Knöten dar. Für die Lastflussberechnung ist immer ein so genannter Bi-

lanzknoten notwendig, damit die erzeugte Leistung mit der verbrauchten Leistung übereinstimmt. Aus dem Umspannwerk wird alle Leistung bezogen, die nicht innerhalb des Netzes erzeugt wird und bilanziert damit gleichzeitig die im Netz vorhandene Leistung. Deshalb wird am Bilanzknoten keine Leistung vorgegeben, sondern Betrag  $U$  und Phase  $\varphi_u$  der Spannung. Ein solcher Bilanzknoten ist für jede Lastflussberechnung zu wählen und kann auch beispielsweise das größte im Netz vorhandene Kraftwerk sein, wenn das zu analysierende Netz kein Verteilnetz ist, sondern ein Hochspannungsnetz, in dem Energie durch Großkraftwerke erzeugt wird. Teilweise werden bei der Analyse von Netzen auch mehrere Bilanzknoten verwendet (vgl. [7], S. 511ff).

Die Leistungsgleichung (1.65) gilt in jedem Knoten des Netzwerks. Mit den im vorherigen Abschnitt bereits festgelegten Vektoren  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  und dem Vektor  $\underline{S} \in \mathbb{C}^K$  gilt damit

$$\underline{S} = \sqrt{3} \underline{U} \circ \underline{I}^*, \quad (1.66)$$

wenn der Operator „ $\circ$ “ eine punktweise Multiplikation zweier Vektoren definiert und die komplexe Konjugation ebenfalls auf jeden Eintrag des Vektors angewendet wird.

### 1.4.3 Die Lastflussgleichungen

Zusammen bilden die Gleichungen (1.64) und (1.66) die Lastflussgleichungen

$$\begin{aligned} \underline{Y} \underline{U} &= \underline{I}, \\ \sqrt{3} \underline{U} \circ \underline{I}^* &= \underline{S}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

also ein nichtlineares Gleichungssystem mit  $2K$  komplexen Gleichungen und zunächst  $3K$  komplexen Unbekannten. Zur Lösung des komplexen Gleichungssystems ist immer eine Aufteilung in Real- und Imaginärteil notwendig, sodass das System eigentlich durch  $4K$  reelle Gleichungen mit  $6K$  Unbekannten beschrieben ist. Wie aber im vorherigen Abschnitt beschrieben, sind in jedem Knoten zwei reelle Werte festgelegt, entweder  $P_i$  und  $Q_i$  oder  $P_i$  und  $U_i$  oder  $U_i$  und  $\varphi_{u_i}$ . Einige Lösungsansätze für die Lastflussberechnung werden beispielsweise in [7] vorgestellt. Für das Newton-Verfahren wird die Leistungsgleichung (1.66) nach dem Strom umgeformt und in die Netzwerkgleichung (1.64) eingesetzt. Wenn eine Lösung der Lastflussgleichungen existiert und diese durch eine Startschätzung in der Nähe der Nominalspannung erreichbar ist, wird das Lastflussproblem als gut konditioniert (engl. *well-conditioned case*) bezeichnet. Dies ist in den meisten Situationen gegeben (vgl. [12]). In weiteren Verlauf der Arbeit wird von gut konditionierten Problemen ausgegangen.

### 1.4.4 Spannungsstabilität

Die Lastflussgleichungen finden insbesondere bei der Planung von elektrischen Netzen Verwendung. Ein wesentlicher Aspekt dabei ist es sicherzustellen, dass die Spannungsabweichung von der Nominalspannung in diesem Netzknoten nicht zu groß wird. Die

Nominalspannung muss dabei nicht in jedem Knoten gleich sein, wenn Transformatoren bei der Analyse berücksichtigt werden. Daher ist die Nominalspannung auch durch einen Vektor  $U^{nom} \in \mathbb{R}^K$  für jeden Knoten einzeln definiert. Durch die Lastflussgleichungen können Extremfälle der Netzbelastung simuliert werden, um das Netz dementsprechend auszulegen (vgl. [7]). Auf die Extremfälle wird in Kapitel 3 genauer eingegangen. Für die berechneten Beträge der Spannungen muss dann in jedem Knoten

$$\left| \frac{U_i - U_i^{nom}}{U_i^{nom}} \right| \leq U^{rel} \quad (1.68)$$

gelten.  $U^{rel}$  definiert demnach ein Spannungsband, das im normalen Betriebszustand an allen Netzanschlusspunkten eingehalten werden muss. Dies beträgt nach der DIN EN 50160 [13] 10 %. Während dies die gesetzliche Minimalanforderung an ein Versorgungsnetz darstellt, ist es für einen Netzbetreiber üblich, höhere Anforderungen an die Spannungsabweichungen von unter 5 % zu erfüllen.

Ziel dieser Arbeit ist es, Untersuchungen über die Sensitivität der berechneten Spannungen zu den vorgegebenen Leistungen anzustellen, um diese für die Spannungsstabilität von elektrischen Netzen berücksichtigen zu können. Dazu wird in dieser Arbeit ein anderer Ansatz zu Lösung der Lastflussgleichungen verfolgt. Die Lastflussgleichungen (1.67) werden als Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems verwendet, ohne dass die Anzahl der Gleichungen durch ineinander Einsetzen vorher reduziert wird. Dieser Ansatz wird bereits in einem bestehenden Algorithmus zur Zielnetzplanung der AG Optimierung und Optimale Steuerung an der Universität Bremen angewendet und bietet verschiedene Vorteile. Zunächst ist durch das Hinzufügen zusätzlicher Freiheitsgrade, wie der Transformatorstufe innerhalb von  $\underline{Y}$  oder der Blindleistungseinspeisung in einigen Knoten eine Optimierung bezüglich der Spannungsstabilität oder der Kosten möglich. Außerdem können Schranken für Strom und Spannung direkt bei der Lösung berücksichtigt werden.

Für die Berechnung der in dieser Arbeit untersuchten parametrischen Sensitivitäten fallen bei der Lösung eines Optimierungsproblems keine großen zusätzlichen Kosten für die Berechnung an. In Kapitel 3 wird die Verwendung der Gleichungen als Nebenbedingungen und die Anwendung der parametrischen Sensitivitätsanalyse auf dieses Problem genau beschrieben. Zuvor wird allerdings die dafür notwendige Theorie parameterabhängiger nichtlinearer Optimierungsprobleme erläutert.

## 2 Parameterabhängige nichtlineare Optimierung

Viele Probleme unter anderem aus der Natur, den Ingenieurwissenschaften und aus der Wirtschaft können auf mathematische Optimierungsprobleme zurückgeführt werden. Diese zeichnen sich zunächst dadurch aus, dass eine Zielfunktion formuliert wird, die bezüglich der freien Variablen des Systems optimal sein soll. In der Optimierung werden dabei beschränkte und unbeschränkte Optimierungsprobleme unterschieden. In der beschränkten Optimierung werden zusätzliche Bedingungen an die Variablen gestellt und als Nebenbedingungen formuliert. Als nichtlineares beschränktes Optimierungsproblem oder kurz nichtlineares Optimierungsproblem (NLP, von engl. *Nonlinear Program*) wird ein Problem dann bezeichnet, wenn entweder die Zielfunktion oder eine der Nebenbedingungen nichtlinear von den Variablen abhängen kann. Anwendungen nichtlinearer Optimierungsprobleme sind zum Beispiel bei Parameteridentifikationen (vgl. [14]), in der Raumfahrt (vgl. [15]), im Energiemanagement (vgl. [16]) und in vielen anderen Bereichen zu finden.

Sowohl unbeschränkte Optimierungsprobleme als auch beschränkte lineare Optimierungsprobleme stellen Spezialfälle der nichtlinearen Optimierung dar und können mit spezialisierten Methoden effizient gelöst werden. Für unbeschränkte NLP werden vor allem das Newton-Verfahren und Varianten davon verwendet, für lineare Optimierungsprobleme beispielsweise Simplex-Verfahren (vgl. [17]). Die theoretischen Grundlagen für das numerische Lösen von allgemeinen nichtlinearen Optimierungsproblemen werden in diesem Kapitel erläutert.

Da sich Optimierungsprobleme in der Regel aus realen Anwendungen ergeben, hängen die Funktionen oft von Parametern ab, die zwar feste Werte annehmen, aber beispielsweise Unsicherheiten unterliegen oder durch die reale Situationen direkt oder indirekt beeinflusst werden. Mit Hilfe der parametrischen Sensitivitätsanalyse kann dabei zunächst die Stärke der Abhängigkeit der Lösung von bestimmten Parametern untersucht werden. Außerdem können die Sensitivitäten für eine Echtzeitoptimierung, d.h. für die Berechnung einer Lösung mit akzeptabler Genauigkeit in hinreichend kleiner Zeit, genutzt werden, wie beispielsweise in [18] oder [19].

Die Standardformulierung von nichtlinearen Optimierungsproblemen ändert sich nur dahingehend, dass alle vorkommenden Funktionen (also Zielfunktion und Nebenbedingungen) von einem Parameter abhängig sind. Diese Formulierung eines so genannten parametrischen nichtlinearen Optimierungsproblems wird in diesem Kapitel als Basis

verwendet, um notwendige und hinreichende Bedingungen für einen optimalen Punkt herzuleiten. Die zentrale Aussage zur Sensitivitätsanalyse liefert anschließend der Sensitivitätssatz, der Aussagen über die Existenz von Lösungen parametergestörter Probleme trifft. Dabei werden innerhalb des Beweises die Sensitivitätsdifferenziale explizit angegeben, die für die postoptimale Analyse und die Echtzeitapproximation genutzt werden können. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei an der Arbeit von Büskens (vgl. [18]).

## 2.1 Parametergestörte nichtlineare Optimierungsprobleme

Den Ausgangspunkt bildet die Formulierung des parametrischen Optimierungsproblems.

**Definition 2.1.1** (Parametrisches nichtlineares Optimierungsproblem). *Es seien die Variablen  $x \in \mathbb{R}^{N_x}$ ,  $p \in \mathbb{R}^{N_p}$ , sowie die Funktionen  $f: \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g = (g_1, \dots, g_{N_g})^T: \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$  und  $h = (h_1, \dots, h_{N_h})^T: \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$  gegeben. Das Problem*

$$(NLP(p)) \quad \begin{array}{ll} \min_x & f(x, p) \\ \text{unter} & g_i(x, p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N_g \\ & h_i(x, p) = 0, \quad i = 1, \dots, N_h \end{array} \quad (2.1)$$

heißt Standardproblem der parametrischen nichtlinearen Optimierung.

Die Zielfunktion  $f$  soll dabei unter den gegebenen Ungleichheitsnebenbedingungen  $g$  und Gleichheitsnebenbedingungen  $h$  durch die Optimierungsvariable  $x$  minimiert werden. Der Störparameter  $p$  ist dabei ein fest vorgegebener Vektor. Optimierungsprobleme können ohne Einschränkungen als Minimierungsprobleme aufgefasst werden, da eine Maximierung durch ein negatives Vorzeichen vor der Zielfunktion  $f$  leicht herbeigeführt werden kann.

Die zulässige Menge beinhaltet alle Punkte, für die die Nebenbedingungen von (2.1) erfüllt sind.

**Definition 2.1.2** (Zulässige Menge). *Die Menge*

$$S(p) := \{x \in \mathbb{R}^{N_x} \mid g_i(x, p) \leq 0, i = 1, \dots, N_g, \\ h_i(x, p) = 0, i = 1, \dots, N_h\} \quad (2.2)$$

heißt Menge der zulässigen Punkte oder zulässige Menge und ein Punkt  $x \in S(p)$  heißt zulässiger Punkt.

Damit wird die Definition lokaler und globaler Minimalstellen formuliert.

**Definition 2.1.3.** *Sei  $x^* \in S(p)$  ein zulässiger Punkt von (2.1). Dann heißt  $x^*$*

- lokale Minimalstelle, wenn eine Umgebung  $U(x^*) \subset \mathbb{R}^{N_x}$  existiert, sodass gilt

$$f(x^*, p) \leq f(x, p) \quad \forall x \in S(p) \cap U(x^*). \quad (2.3)$$

- strenge lokale Minimalstelle, wenn eine Umgebung  $U(x^*) \subset \mathbb{R}^{N_x}$  existiert, sodass gilt

$$f(x^*, p) < f(x, p) \quad \forall x \in S(p) \cap U(x^*), x \neq x^*. \quad (2.4)$$

- globale Minimalstelle, wenn

$$f(x^*, p) \leq f(x, p) \quad \forall x \in S(p). \quad (2.5)$$

- strenge globale Minimalstelle, wenn

$$f(x^*, p) < f(x, p) \quad \forall x \in S(p), x \neq x^*. \quad (2.6)$$

Für die Herleitung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen einer solchen Minimalstelle müssen einige Voraussetzungen erfüllt sein. Diese können mit der Einführung der Menge der aktiven Indizes und der Definition von Regularität und Normalität von Optimierungsproblemen kompakt angegeben werden.

Die Menge der aktiven Indizes ist nur für Ungleichheitsnebenbedingungen von Bedeutung, die als aktiv bezeichnet werden, wenn  $g_i(x, p) = 0$  ist.

**Definition 2.1.4** (Menge der aktiven Indizes). Sei  $x \in S(p)$  ein zulässiger Punkt von (2.1). Die Menge

$$\mathcal{A}(x, p) := \{i = 1, \dots, N_g : g_i(x, p) = 0\} \quad (2.7)$$

heißt Menge der aktiven Indizes.

Damit wird schließlich die Definition für Regularität und Normalität wie folgt angegeben.

**Definition 2.1.5** (Regularität und Normalität). Die Funktionen  $g : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$  und  $h : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$  seien differenzierbar und  $x^* \in S(p)$  eine lokale Minimalstelle von (2.1). Dieser Punkt heißt

- regulär, wenn gilt:

i) Die Gradienten  $\nabla_x h_1, \dots, \nabla_x h_{N_h}$  sind linear unabhängig.

ii) Es existiert ein  $d \in \mathbb{R}^{N_x} / \{0\}$ , sodass

$$\nabla_x g_i(x^*, p)^T d < 0, \quad \forall i \in \mathcal{A}(x^*, p) \text{ und} \quad (2.8)$$

$$\nabla_x h_i(x^*, p)^T d = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N_h. \quad (2.9)$$

- normal, wenn die Gradienten

$$\nabla_x g_i(x^*, p), \quad \forall i \in \mathcal{A}(x^*, p) \text{ und} \quad (2.10)$$

$$\nabla_x h_i(x^*, p), \quad \forall i = 1, \dots, N_h \quad (2.11)$$

linear unabhängig sind.

### 2.1.1 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Optimalitätskriterien für nichtlineare Optimierungsprobleme sind von W. Karush sowie gemeinsam von H. W. Kuhn und A. W. Tucker unabhängig voneinander formuliert worden. Diese werden deshalb auch Karush-Kuhn-Tucker oder kurz KKT-Bedingungen genannt. Als Hilfsmittel für die Formulierung dient die Lagrange-Funktion, in der Zielfunktion und Nebenbedingungen zusammengefasst werden.

**Definition 2.1.6** (Lagrange-Funktion). *Es seien  $\lambda \in \mathbb{R}^{N_g}$  und  $\mu \in \mathbb{R}^{N_h}$  gegeben. Dann ist die Lagrange-Funktion  $L: \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_g} \times \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$  zum nichtlinearen Optimierungsproblem (2.1) definiert durch*

$$L(x, \lambda, \mu, p) := f(x, p) + \lambda^T g(x, p) + \mu^T h(x, p). \quad (2.12)$$

Die Vektoren  $\lambda$  und  $\mu$  werden Lagrange-Multiplikatoren oder duale Variablen genannt. In diesem Zusammenhang wird die Optimierungsvariable  $x$  häufig primale Variable genannt.

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen oder KKT-Bedingungen können damit in folgendem Satz zusammengefasst werden. Voraussetzung dafür ist die Differenzierbarkeit aller vorkommenden Funktionen in (2.1).

**Satz 2.1.7** (KKT-Bedingungen). *Es seien  $f, g$  und  $h$  stetig differenzierbar bzgl.  $x$  in einer Umgebung der lokalen Minimalstelle  $x^*$  von (2.1). Ist  $x^*$  regulär, dann existieren  $\lambda^*$  und  $\mu^*$ , sodass*

i) die Optimalitätsbedingung

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \quad (2.13)$$

ii) die Vorzeichenbedingung

$$\lambda_i \geq 0, \text{ für } i = 1, \dots, N_g, \quad (2.14)$$

iii) und die Komplementaritätsbedingung

$$\lambda_i g_i(x) = 0, \text{ für } i = 1, \dots, N_g \quad (2.15)$$

gelten. Ist  $x^*$  normal, so sind die Multiplikatoren  $\lambda^*$  und  $\mu^*$  zusätzlich eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Zu finden beispielsweise in [17]. □

Da es sich bei diesen Bedingungen um notwendige Bedingungen handelt, ist nicht jeder Punkt, der diese Bedingungen erfüllt, ein lokales Minimum zu (2.1). Ein beliebiger Punkt  $x^*$ , der mit Multiplikatoren  $\lambda$  und  $\mu$  die Bedingungen (2.13)-(2.15) erfüllt, wird *kritischer Punkt* genannt. Für einen kritischen Punkt kann anhand der hinreichenden Bedingungen überprüft werden, ob es sich tatsächlich um ein lokales Minimum handelt.

## 2.1.2 Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Für die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung wird die zweimalige stetige Differenzierbarkeit aller in (2.1) vorkommenden Funktionen vorausgesetzt. Während in der unbeschränkten Optimierung eine Überprüfung der positiven Definitheit der zweiten Ableitung in alle Richtungen notwendig ist, muss diese für beschränkte Probleme nur in „weniger“ Richtungen überprüft werden. Diese werden über den *kritischen Kegel* definiert.

**Definition 2.1.8** (Kritischer Kegel). *Die Menge*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x^*, p) := \{d \in \mathbb{R}^{N_x} \mid & \nabla_x g_i(x^*, p)^T v \leq 0, \text{ für } i \in \mathcal{A}(x^*, p), \lambda^* = 0, \\ & \nabla_x g_i(x^*, p)^T v = 0, \text{ für } i \in \mathcal{A}(x^*, p), \lambda^* \geq 0, \\ & \nabla_x h_j(x^*, p)^T v = 0, \text{ für } j = 1, \dots, N_h\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

heißt kritischer Kegel von  $x^*$ .

**Satz 2.1.9** (Hinreichende Optimalitätsbedingungen). *Es seien  $f, g$  und  $h$  zweimal stetig differenzierbar bzgl.  $x$  in einer Umgebung des zulässigen und normalen Punktes  $x^*$ . Für diesen seien zusammen mit den Multiplikatoren  $\lambda^*$  und  $\mu^*$  die KKT-Bedingungen (2.13)-(2.15) erfüllt. Zusätzlich sei die Hessematrix von der Lagrange-Funktion positiv definit auf dem kritischen Kegel, es gelte also*

$$v^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*, p) v > 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}(x^*, p) / \{0\}. \quad (2.17)$$

Dann ist  $x^*$  eine strenge lokale Minimalstelle von (2.1).

**Beweis:** Zu finden beispielsweise in [17]. □

**Bemerkung 2.1.10** (Strenge hinreichende Optimalitätsbedingungen). *Wird Aussage (2.14) verstärkt, indem*

$$\lambda_i^* > 0 \forall i \in \mathcal{A}(x^*, p) \quad (2.18)$$

vorausgesetzt wird, vereinfacht sich der kritische Kegel zu

$$\mathcal{C}(x^*, p) = \ker(\nabla_x g_i(x^*, p), \nabla_x h_j(x^*, p) \mid i \in \mathcal{A}(x^*, p), j = 1, \dots, N_h).$$

Die Aussage aus Satz 2.1.9 gilt dann weiterhin und die Gleichungen (2.13) und (2.15) sowie (2.17) werden zusammen mit der strengen Vorzeichenbedingung (2.18) als strenge hinreichende Optimalitätsbedingungen bezeichnet (vgl. [18]).

## 2.2 Parametrische Sensitivitätsanalyse

Die parametrische Sensitivitätsanalyse des gestörten Optimierungsproblems (2.1) zielt zunächst darauf ab, die Sensitivität einzelner Komponenten des Problems, wie der Zielfunktion und der Optimierungsvariable bezüglich des Parameters  $p$  zu evaluieren. Dazu

wird ein *Nominalparameter*  $p_0$  festgelegt. Dieser gibt die Parameter des Problems (2.1) im ungestörten Zustand an und ist durch  $NLP(p_0)$  beschrieben. Als Sensitivitäten oder *Sensitivitätsdifferenziale* oder auch *Sensitivitätsableitungen* werden die totalen Ableitungen der primären und dualen Variablen, sowie der Systemgleichungen von (2.1) nach dem Parameter  $p$ , ausgewertet im Nominalparameter  $p_0$ , bezeichnet. Alle Folgerungen beziehen sich auf das ungestörte Problem  $NLP(p_0)$ , für das eine Lösung bereits bekannt sei. Die zentrale Aussage der Sensitivitätsanalyse stellt der Sensitivitätssatz dar, der von Fiacco formuliert wurde. Die wichtigsten Resultate dazu sind in seinem Werk [20] zusammengefasst. Der Satz sagt im Wesentlichen aus, dass sich die Lösung des Optimierungsproblems (2.1) in einer Umgebung um den Nominalparameter stetig mit dem Parameter ändert und liefert außerdem eine explizite Berechnungsformel für die Sensitivitätsdifferenziale.

Der Beweis folgt im Wesentlichen aus dem Satz über implizite Funktionen, an dessen Aussage daher an dieser Stelle erinnert sei.

**Satz 2.2.1** (Implizite Funktionen). *Es sei  $F: \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ ,  $(x, p) \mapsto F(x, p)$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Für den Punkt  $(x^*, p_0) \in \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p}$  gelte  $F(x^*, p_0) = 0$  und die Jacobi-Matrix in diesem Punkt  $\nabla_x F(x^*, p_0) \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$  sei invertierbar.*

*Dann existiert eine offene Umgebung  $P \subset \mathbb{R}^{N_p}$  von  $p_0$ , eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^{N_x}$  von  $x^*$ , sowie eine stetig differenzierbare Funktion  $x: P \rightarrow U$ ,  $p \mapsto x(p)$  mit  $x(p_0) = x^*$  und  $F(x(p), p) = 0$  für alle  $p \in P$ .*

*Ist  $(x, p) \in U \times P$  ein Punkt mit  $F(x, p) = 0$ , so folgt  $x = x(p)$ . Für die Jacobi-Matrix der impliziten Funktion in  $p_0$  gilt außerdem:*

$$\nabla_p x(p_0) = -(\nabla_x F(x^*, p_0))^{-1} \nabla_p F(x^*, p_0).$$

**Beweis:** Der Beweis ist unter anderem bei Forster zu finden (vgl. [21]). □

Die Vorgehensweise für den Beweis des Sensitivitätssatzes orientiert sich insgesamt an der Vorgehensweise von Geffken (vgl. [22], S. 77ff), der den Beweis von Büskens (vgl. [18]) durch eine explizite Behandlung der Ungleichheitsnebenbedingungen ergänzt. Dafür ist das folgende Lemma ein weiteres Hilfsmittel.

**Lemma 2.2.2.** *Für das nichtlineare Optimierungsproblem (2.1) seien die strengen hinreichenden Optimalitätsbedingungen für das lokale Minimum  $x^*$  zusammen mit den Multiplikatoren  $\lambda^*$  und  $\mu^*$  und damit insbesondere auch die Voraussetzungen von Satz (2.1.9) erfüllt. Dann ist die Matrix*

$$M := \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*, p) & \nabla_x g(x^*, p)^T & \nabla_x h(x^*, p)^T \\ \Lambda^* \nabla_x g(x^*, p) & \Gamma(x^*, p) & 0 \\ \nabla_x h(x^*, p) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

mit

$$\Lambda^* := \begin{pmatrix} \lambda_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N_g}^* \end{pmatrix}$$

und

$$\Gamma(x^*, p) := \begin{pmatrix} g_1(x^*, p) & & \\ & \ddots & \\ & & g_{N_g}(x^*, p) \end{pmatrix},$$

invertierbar.

**Beweis:** Es sei  $k \geq 0$  die Anzahl der inaktiven Nebenbedingungen und durch Umordnung ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mathcal{A}(x^*, p) = \{k+1, \dots, N_g\}$ . Damit gilt  $g_{k+1}(x^*, p) = \dots = g_{N_g}(x^*, p) = 0$ . Mit ausschließlich inaktiven Nebenbedingungen auf der Diagonalen ist die Matrix

$$\Gamma_1^* = \begin{pmatrix} g_1(x^*, p) & & \\ & \ddots & \\ & & g_k(x^*, p) \end{pmatrix}$$

invertierbar, sodass

$$\Gamma(x^*, p) = \begin{pmatrix} \Gamma_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vereinfacht ausgedrückt werden kann. Die zu den inaktiven Nebenbedingungen gehörenden Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k$  sind aufgrund der Komplementaritätsbedingung (2.15) gleich 0, während aus der strikten Komplementaritätsbedingung folgt, dass  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{N_g} > 0$  sind. Dadurch ist die Matrix

$$\Lambda_1^* = \begin{pmatrix} \lambda_{k+1}^* & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N_g}^* \end{pmatrix}$$

ebenfalls invertierbar ist und

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_1^* \end{pmatrix}.$$

Zur weiteren Vereinfachung seien die Matrizen

$$(G_1)^T := (\nabla_x g_1, \dots, \nabla_x g_k)(x^*, p)$$

und

$$(G_2)^T := (\nabla_x g_{k+1}, \dots, \nabla_x g_{N_g})(x^*, p),$$

sowie

$$\nabla_{xx}^2 L := \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*, p)$$

und

$$\nabla_x h := \nabla_x h(x^*, p)$$

definiert. Um zu zeigen, dass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L & (G_1)^T & (G_2)^T & \nabla_x h^T \\ 0 & \Gamma_1^* & 0 & 0 \\ \Lambda_1^* G_2 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_x h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, genügt es zu zeigen, dass mit dem Vektor  $v \in \mathbb{R}^{N^x + N^g + N^h}$  aus der Gleichung  $Mv = 0$  folgt, dass  $v = 0$  ist. Dazu wird die Matrix mit dem durch  $v_1 \in \mathbb{R}^{N^x}$ ,  $v_2 \in \mathbb{R}^k$ ,  $v_3 \in \mathbb{R}^{N^g - k}$  und  $v_4 \in \mathbb{R}^{N^h}$  entsprechend partitionierten Vektor  $v$  multipliziert:

$$\nabla_{xx}^2 L v_1 + (G_1)^T v_2 + (G_2)^T v_3 + \nabla_x h^T v_4 = 0 \quad (2.20)$$

$$\Gamma_1^* v_2 = 0 \quad (2.21)$$

$$\Lambda_1^* G_2 v_1 = 0 \quad (2.22)$$

$$\nabla_x h v_1 = 0 \quad (2.23)$$

Aus Gleichung (2.21) folgt wegen der Invertierbarkeit von  $\Gamma_1^*$  sofort  $v_2 = 0$  und aus Gleichung (2.22) folgt wegen der Invertierbarkeit von  $\Lambda_1^*$ , dass  $G_2 v_1 = 0$  gilt. Die Multiplikation von Gleichung (2.20) mit  $v_1^T$  von links liefert

$$\begin{aligned} 0 &= v_1^T \nabla_{xx}^2 L v_1 + v_1^T (G_2)^T v_3 + v_1^T \nabla_x h^T v_4 \\ &= v_1^T \nabla_{xx}^2 L v_1 + (G_2 v_1)^T v_3 + (\nabla_x h v_1)^T v_4 \\ &= v_1^T \nabla_{xx}^2 L v_1, \end{aligned} \quad (2.24)$$

woraus auf Grund der positiven Definitheit von  $\nabla_{xx}^2 L$  folgt, dass  $v_1 = 0$  ist. Aus der Normalität von  $x^*$  folgt schließlich, dass die Spalten der Matrix  $((G_2)^T, \nabla_x h^T)$  linear unabhängig sind und damit aus der vereinfachten Gleichung (2.20)

$$G_2 v_3 + \nabla_x h v_4 = 0,$$

dass  $v_3 = v_4 = 0$  gilt. Insgesamt folgt also  $v = 0$  und die Invertierbarkeit der Matrix  $M$  ist gezeigt.  $\square$

Schließlich kann der Sensitivitätssatz formuliert und bewiesen werden (vgl. [22], S. 80ff).

**Satz 2.2.3** (Sensitivitätssatz). *Es seien  $f, g$  und  $h$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen bezüglich  $x$ . Außerdem seien die Funktionen  $g$  und  $h$ , sowie die Ableitungen  $\nabla_x f$ ,  $\nabla_x g$  und  $\nabla_x h$  einmal stetig differenzierbar bezüglich  $p$ .*

*$x^*$  sei ein zulässiger Punkt von  $NLP(p_0)$  und erfülle zusammen mit den Multiplikatoren  $\lambda^*$  und  $\mu^*$  die strengen hinreichenden Optimalitätsbedingungen (Satz 2.1.9 und Bemerkung 2.1.10).*

Dann existieren eine Umgebung  $P \in \mathbb{R}^{N_p}$  und stetig differenzierbare Funktionen  $x: P \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ , sowie  $\lambda: P \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$  und  $\mu: P \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$ , für die folgende Aussagen gelten:

i)  $x(p_0) = x^*, \lambda(p_0) = \lambda^*, \mu(p_0) = \mu^*$ .

ii) Die Menge der aktiven Indizes bleibt unverändert

$$\mathcal{A}(x(p), p) = \mathcal{A}(x^*, p_0) \quad \forall p \in P.$$

iii) Der Punkt  $x(p)$  erfüllt für alle  $p \in P$  zusammen mit  $\lambda(p)$  und  $\mu(p)$  die strengen hinreichenden Optimalitätsbedingungen für das Problem  $NLP(p)$ , d.h. insbesondere  $x(p)$  bleibt normal und ist strenge lokale Minimalstelle von  $NLP(p)$ .

**Beweis:** Sei  $\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N_g} \end{pmatrix}$ . Die Optimalitätsbedingung (2.13), die Komplementaritätsbedingung (2.15) sowie die Gleichheitsnebenbedingung können für  $NLP(p)$  durch die Hilfsfunktion

$$F(x, \lambda, \mu, p) := \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \lambda, \mu, p) \\ \Lambda g(x, p) \\ h(x, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_x f(x, p) + \lambda^T \nabla_x g(x, p) + \mu^T \nabla_x h(x, p) \\ \Lambda g(x, p) \\ h(x, p) \end{pmatrix} = 0$$

ausgedrückt werden. Für  $NLP(p_0)$  sind diese Bedingungen für den Punkt  $\xi^* := (x^*, \lambda^*, \mu^*)$  nach Voraussetzung erfüllt, sodass gilt

$$F(\xi^*, p_0) = 0.$$

Um den Satz über implizite Funktionen auf  $F$  anwenden zu können, muss die Jacobi-Matrix

$$\nabla_x F(\xi, p_0) = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*, p_0) & \nabla_x g(x^*, p_0)^T & \nabla_x h(x^*, p_0)^T \\ \Lambda^* \nabla_x g(x^*, p_0) & \Gamma(x^*, p_0) & 0 \\ \nabla_x h(x^*, p_0) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

invertierbar sein. Die Voraussetzungen für Lemma 2.2.2 sind erfüllt und die Regularität von  $\nabla_x F(\xi, p_0)$  damit gezeigt. Also existiert nach dem Satz über implizite Funktionen für alle  $p$  in einer Umgebung  $P$  von  $p_0$  eine Funktion  $\xi(p)$  und die Gleichung  $F(\xi(p), p) = 0$  ist erfüllt. Damit sind bereits die Bedingungen (2.13) und (2.15) für  $x(p)$  zusammen mit den Multiplikatoren  $\lambda(p)$  und  $\mu(p)$  erfüllt. Die Differenzierbarkeit der Funktion  $\xi(p)$  bezüglich  $p$  sowie der Zusammenhang

$$\frac{d}{dp} \xi(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dp} x(p_0) \\ \frac{d}{dp} \lambda(p_0) \\ \frac{d}{dp} \mu(p_0) \end{pmatrix} = -(\nabla_x F(\xi^*, p_0))^{-1} \nabla_p F(\xi^*, p_0) \quad (2.26)$$

folgen zusätzlich aus dem Satz über implizite Funktionen. Um die strengen hinreichenden Optimalitätsbedingungen vollständig zu erfüllen, bleibt noch strenge Vorzeichenbedingung (2.18) sowie die Normalität von  $x(p)$  und die positive Definitheit der Hessematrix der Lagrange-Funktion auf dem kritischen Kegel zu zeigen.

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Sortierung der Nebenbedingungen wie im Beweis von Lemma 2.2.2 gegeben, das heißt  $\mathcal{A}(x^*, p_0) = k + 1, \dots, N_g$  und es gilt

$$\lambda_i^* = \lambda_i(p_0) > 0, \text{ für } i \in \mathcal{A}(x^*, p_0)$$

sowie

$$g_i(x^*, p_0) = g_i(x(p_0), p_0) < 0 \text{ für } i = 1, \dots, k.$$

Auf Grund der Stetigkeit von  $\lambda$  und  $g$  bezüglich  $p$  kann die Umgebung  $P$  hinreichend klein gewählt werden, sodass für alle  $p \in P$  auch  $\lambda_{k+1}(p), \dots, \lambda_{N_g}(p) > 0$  und  $g_1(x(p), p), \dots, g_k(x(p), p) < 0$  gilt. Zusammen mit der Gültigkeit von  $F(\xi(p), p) = 0$  impliziert dies sofort die strenge Vorzeichenbedingung, da demnach

$$g_{k+1}(x(p), p) = \dots = g_{N_g}(x(p), p) = 0$$

und

$$\lambda_1(p) = \dots = \lambda_k(p) = 0$$

erfüllt sind. Die Gleichheit der aktiven Mengen  $\mathcal{A}(x^*, p_0) = \mathcal{A}(x(p), p)$  ist damit ebenso gezeigt.

Der Fortbestand der Normalität der Lösung sowie positive Definitheit von  $\nabla_{xx}^2 L$  folgen ebenfalls aus der Stetigkeit der beteiligten Funktionen  $\nabla_x g, \nabla_x h$  bzw.  $\nabla_{xx}^2 L$  bezüglich  $p$ .  $\square$

Die Ausformulierung von Gleichung (2.26) aus dem Beweis führt zu einem expliziten Gleichungssystem der Sensitivitätsdifferenziale der primalen und dualen Variablen

$$-\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(\xi^*) & \nabla_x g(x^*)^T & \nabla_x h(x^*)^T \\ \Lambda^* \nabla_x g(x^*) & \Gamma(x^*) & 0 \\ \nabla_x h(x^*) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dp}(p_0) \\ \frac{d\lambda}{dp}(p_0) \\ \frac{d\mu}{dp}(p_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{xp}^2 L(\xi^*) \\ \Lambda^* \nabla_p g(x^*) \\ \nabla_p h(x^*) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Die Matrix auf der linken Seite der Gleichung wird dabei als Karush-Kuhn-Tucker-Matrix oder kurz KKT-Matrix bezeichnet und ist für die numerische Lösung von Optimierungsproblemen von großer Bedeutung. Näheres dazu wird in Abschnitt 2.3 ausgeführt.

Um die Sensitivitäten der Zielfunktion sowie der Nebenbedingungen zu berechnen, werden zunächst Zugehörigkeitsfunktionen definiert, die von den primalen und dualen Variablen abhängig sind.

**Definition 2.2.4** (Zugehörigkeitsfunktion). *Sei  $\tilde{z}: \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_g} \times \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$  eine einmal stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin seien die Voraussetzungen des Sensitivitätssatzes 2.2.3 erfüllt, sodass in einer Umgebung  $P$  um eine Nominalstörung  $p_0$  die*

Funktionen  $x: \mathbb{R}^{N_x} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lambda: \mathbb{R}^{N_g} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mu: \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert sind. Dann heißt  $z(p) := \tilde{z}(x(p), \lambda(p), \mu(p), p)$  Zugehörigkeitsfunktion der Problemstellung  $NLP(p)$ .

Die Sensitivitäten der Zugehörigkeitsfunktionen ergeben sich dann als direkte Folgerung aus dem Sensitivitätssatz.

**Korollar 2.2.5.** *Es sei  $z: P \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zugehörigkeitsfunktion zu  $NLP(p)$  und die Voraussetzungen des Sensitivitätssatzes 2.2.3 seien erfüllt. Dann kann die Sensitivitätsableitung von  $z$  durch die Gleichung*

$$\frac{dz}{dp}(p_0) = -(\nabla_x z, \nabla_\lambda z, \nabla_\mu z) \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L & \nabla_x g^T & \nabla_x h^T \\ \Lambda^* \nabla_x g & \Gamma & 0 \\ \nabla_x h & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \nabla_{xp}^2 L \\ \Lambda^* \nabla_p g \\ \nabla_p h \end{pmatrix} + \nabla_p z(p_0) \quad (2.28)$$

ausgedrückt werden, wobei die beteiligten Funktionen weiterhin im optimalen Punkt  $\xi^*$  bzw.  $x^*$  ausgewertet werden.

**Beweis:** Die Behauptung folgt direkt durch Anwendung der Kettenregel auf Gleichung 2.27, die sich aus dem Sensitivitätssatz ergibt.  $\square$

Einige Ergebnisse für die Sensitivitätsdifferenziale der oben genannten Funktionen werden im Folgenden ohne Beweis angegeben. Diese können bei Büskens (vgl. [23], S. 82ff) oder Geffken (vgl. [22], S. 83ff) nachvollzogen werden. Sie leiten sich entweder direkt aus Gleichung (2.28) ab oder ergeben sich durch einfache Umformungen und durch Ausnutzen der Optimalitätsbedingungen beteiligter Funktionen. Die Unveränderlichkeit der aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen und der Gleichheitsnebenbedingungen folgt direkt aus dem Sensitivitätssatz, da sich die aktive Menge nicht verändern darf und da die Gleichheitsbedingungen weiterhin erfüllt sind, sodass die Sensitivitäten dieser Nebenbedingungen immer gleich 0 sind.

**Korollar 2.2.6.** *Die Voraussetzungen von Satz 2.2.3 seien erfüllt. Dann gilt für die Sensitivitäten*

i) *der Lagrange-Funktion*

$$\frac{dL}{dp}(p_0) = \nabla_p L = \nabla_p f + (\lambda^*)^T \nabla_p g + (\mu^*)^T \nabla_p h. \quad (2.29)$$

ii) *der Zielfunktion*

$$\frac{df}{dp}(p_0) = \nabla_x f \frac{dx}{dp} + \nabla_p f, \quad (2.30)$$

$$\frac{df}{dp}(p_0) = \nabla_p L. \quad (2.31)$$

iii) der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\frac{dg_i}{dp}(p_0) &= \nabla_x g_i \frac{dx}{dp} + \nabla_p g_i, & i = 1, \dots, N_g, \\ \frac{dg_i}{dp}(p_0) &= 0, & i \in \mathcal{A}(x^*, p_0), \\ \frac{dh_i}{dp}(p_0) &= 0, & i = 1, \dots, N_h.\end{aligned}\quad (2.32)$$

### 2.2.1 Lineare Störungen in den Nebenbedingungen

Wenn ein Störparameter ausschließlich linear in den Nebenbedingungen auftritt, vereinfachen sich die partiellen Ableitungen nach diesem Parameter deutlich. Um in späteren Betrachtungen darauf zurückgreifen zu können, wird das Problem  $NLP(p)$  so modifiziert, dass dieser lineare Störparameter zusätzlich auftritt, obwohl die allgemeine Störung  $p$  in  $NLP(p)$  eine solche Störung beinhaltet. Mit den Störparametern  $p \in \mathbb{R}^{N_p}$  und  $q \in \mathbb{R}^{N_q}$  ist es definiert als

$$(NLP(p, q)) \quad \min_x f(x, p) \quad \text{unter} \quad \begin{aligned} \hat{g}(x, p, q) &= g_i(x, p) + q_i \leq 0, & i = 1, \dots, N_g. \\ \hat{h}(x, p, q) &= h_i(x, p) + q_{N_g+i} = 0, & i = 1, \dots, N_h \end{aligned} \quad (2.33)$$

Es gilt  $\nabla_{xq}^2 L = 0$ , sowie  $\nabla_q \hat{g} = \begin{pmatrix} E_{N_g} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_g+N_h \times N_g}$  und

$$\nabla_q \hat{h} = \begin{pmatrix} 0 & E_{N_h} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_g+N_h \times N_h}.$$

Damit gilt für die Sensitivitätsdifferenziale nach den linearen Störungen  $q$  mit den Nominalparametern  $p_0 \in \mathbb{R}^{N_p}$  und  $q_0 \in \mathbb{R}^{N_q}$

i) der primären und dualen Variablen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dq}(p_0, q_0) \\ \frac{d\lambda}{dq}(p_0, q_0) \\ \frac{d\mu}{dq}(p_0, q_0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(\xi^*) & \nabla_x g(x^*)^T & \nabla_x h(x^*)^T \\ \Lambda^* \nabla_x g(x^*) & \Gamma(x^*) & 0 \\ \nabla_x h(x^*) & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Lambda^* & 0 \\ 0 & E_{N_h} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

ii) der Lagrange-Funktion und der Zielfunktion

$$\frac{dL}{dq}(p_0, q_0) = \frac{df}{dq}(p_0, q_0) = ((\lambda^*)^T, (\mu^*)^T). \quad (2.35)$$

iii) der Nebenbedingungen

$$\frac{d\hat{g}}{dq}(p_0, q_0) = \nabla_x g \frac{dx}{dq} + \begin{pmatrix} E_{N_g} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Sollen also nur die Ableitungen nach dieser Störung berechnet werden, sind für die

Berechnung der rechten Seite des Gleichungssystems (2.27) keine weiteren Ableitungsberechnungen des Gradienten der Lagrange-Funktion und der Nebenbedingungen nach dem Störparameter  $q$  notwendig (vgl. [18], S. 25ff).

## 2.2.2 Approximation der Lösung des parametergestörten Problems

Obwohl der Sensitivitätssatz besagt, dass Funktionen  $x(p)$ ,  $\lambda(p)$  und  $\mu(p)$  als lokale optimale Lösung für  $NLP(p)$  existieren, sind diese nicht explizit bekannt. Bei einer Abweichung des Parameters vom Nominalparameter  $p = p_0 + \Delta p$  können die primalen und dualen Variablen durch lineare Taylorapproximationen mit Hilfe der Sensitivitätsdifferentialen

$$x(p) \approx x(p_0) + \frac{dx}{dp}(p_0)\Delta p = \tilde{x}(p), \quad (2.37)$$

$$\lambda(p) \approx \lambda(p_0) + \frac{d\lambda}{dp}(p_0)\Delta p = \tilde{\lambda}(p), \quad (2.38)$$

$$\mu(p) \approx \mu(p_0) + \frac{d\mu}{dp}(p_0)\Delta p = \tilde{\mu}(p) \quad (2.39)$$

angenähert werden. Aus dem Satz von Taylor ergibt sich daraus direkt die Fehlerordnung für die Approximation. Diese überträgt sich auf den Fehler der Zielfunktion und der Nebenbedingungen und wird im folgenden Satz zusammengefasst. Innerhalb dieses Abschnitts werden dabei nur die aktiven Nebenbedingungen betrachtet, die fortan als  $g_{\mathcal{A}}(x(p), p)$  bezeichnet werden. Die zu diesen Nebenbedingungen gehörenden Multiplikatoren werden dementsprechend mit  $\lambda_{\mathcal{A}}$  bezeichnet. Die Multiplikatoren der inaktiven Nebenbedingungen bleiben nach dem Sensitivitätssatz gleich 0.

**Satz 2.2.7** (Fehlerordnung der linearen Approximation). *Es seien die Voraussetzungen des Sensitivitätssatzes (2.2.3) erfüllt. Außerdem seien die Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  bezüglich  $x$  und  $p$  dreimal stetig differenzierbar. Dann existiert eine Umgebung  $U(p_0)$ , sodass für  $p = p_0 + \Delta p \in U(p_0)$  die folgenden Fehlerabschätzungen gelten:*

$$\begin{aligned} \|x(p) - \tilde{x}(p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2), \\ \|\lambda_{\mathcal{A}}(p) - \tilde{\lambda}_{\mathcal{A}}(p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2), \\ \|\mu(p) - \tilde{\mu}(p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2), \\ \|f(x(p), p) - f(\tilde{x}(p), p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2), \\ \|g_{\mathcal{A}}(\tilde{x}(p), p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2), \\ \|h(x(p), p) - h(\tilde{x}(p), p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2), \\ \|\nabla_x L(\tilde{x}(p), \tilde{\lambda}(p), \tilde{\mu}(p), p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2). \end{aligned} \quad (2.40)$$

**Beweis:** Büskens beweist diesen Satz in seiner Arbeit (vgl. [18], S. 36). □

Rein vom Rechenaufwand her betrachtet eignet sich diese Annäherung für eine Echt-

zeitapproximation der Lösung, da sie durch eine reine Matrix-Vektormultiplikation und eine anschließende Addition von Vektoren sehr schnell berechenbar ist. Dennoch ist eine lineare Näherung für viele Probleme zu ungenau, sodass Büskens in [18] einen Algorithmus zur Verbesserung der Annäherung entwickelt. Dieser nutzt aus, dass der Fehler in den aktiven Nebenbedingungen und den Gleichheitsnebenbedingungen

$$g_{\mathcal{A}}(\tilde{x}(p), p) = \varepsilon_g \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{A}}}, \quad (2.41)$$

$$h(\tilde{x}(p), p) = \varepsilon_h \in \mathbb{R}^{N_h} \quad (2.42)$$

„mit geringem Rechenaufwand [...] exakt berechenbar ist“ ([18], S. 38). Dieser Fehler wird als lineare Störung in den Nebenbedingungen  $q$  mit dem Nominalparameter  $q_0 = 0$  in  $NLP(p, q)$  interpretiert und kann daher für ein erneutes Update der Variablen nach Gleichung (2.39) verwendet werden. Der Störvektor  $\varepsilon = (\varepsilon_g, \varepsilon_h)^T$  hat dabei die Dimension  $N_{\mathcal{A}} + N_h \leq N_q$ , sodass nicht alle, sondern nur die aktiven Ungleichheitsbedingungen linear gestört werden.

Die Approximation der primalen Variable mit dem Sensitivitäten des Störparameters nach Gleichung (2.39)

$$\tilde{x}^{[1]}(p) = x(p_0, 0) + \frac{dx}{dp}(p_0, 0)\Delta p \quad (2.43)$$

kann ein weiteres Mal mit der berechneten Störung  $\varepsilon$  angenähert werden

$$\tilde{x}^{[2]}(p) = \tilde{x}^{[1]}(p) - \frac{dx}{d\varepsilon}(p_0, 0)\varepsilon. \quad (2.44)$$

Büskens zeigt, dass sich dadurch nicht nur der Fehler in den aktiven Nebenbedingungen und den Gleichheitsnebenbedingungen verringert, sondern dass sich auch die Fehlerabschätzung für die primale Variable und die Zielfunktion verbessert. Daraus ergibt sich folgender Algorithmus, durch den der Fehler in den relevanten Nebenbedingungen durch weitere Approximationen von  $x$  iterativ gegen 0 konvergiert, wenn der Fehler in jedem Schritt erneut für die Approximation verwendet wird.

---

**Algorithmus 1** Zulässigkeitsselfstkorrektur

---

- 1: Wähle  $\delta > 0$ , setze  $r = 1$
  - 2: Berechne  $\tilde{x}^{[1]} = x(p_0, 0) + \frac{dx}{dp}(p_0, 0)\Delta p$
  - 3:  $\varepsilon^{[1]} = (g_{\mathcal{A}}(\tilde{x}^{[1]}, p), h(\tilde{x}^{[1]}, p))^T$
  - 4: **while**  $\|\varepsilon^{[r]}\| > \delta$  **do**
  - 5:      $\tilde{x}^{[r+1]} = \tilde{x}^{[r]} - \frac{dx}{d\varepsilon}(p_0, 0)\varepsilon^{[r]}$
  - 6:     Setze  $r = r + 1$
  - 7:      $\varepsilon^{[r]} = (g_{\mathcal{A}}(\tilde{x}^{[r]}, p), h(\tilde{x}^{[r]}, p))^T$
  - 8: **end while**
- 

Die Konvergenz von Algorithmus 1 und die neuen Fehlerabschätzungen aller Variablen und Funktionen fasst der folgende Satz zusammen.

**Satz 2.2.8** (Fehlerabschätzungen nach der Zulässigkeitsselbstkorrektur). *Es seien die Voraussetzungen des Sensitivitätssatzes (2.2.3) erfüllt. Außerdem seien die Funktionen  $f, g$  und  $h$  bezüglich  $x$  und  $p$  dreimal stetig differenzierbar. Dann existiert eine Umgebung  $U(p_0)$ , sodass für  $p = p_0 + \Delta p \in U(p_0)$  die folgenden Aussagen gelten:  
Unter Verwendung der orthogonalen Zerlegung*

$$\frac{1}{2}(\Delta p)^T \frac{d^2x}{p^2} \Delta p = v + w$$

mit

$$v \in \ker \left( \nabla_x \begin{pmatrix} g_{\mathcal{A}}(p_0) \\ h(p_0) \end{pmatrix} \right) \text{ und } w \in \left( \ker \left( \nabla_x \begin{pmatrix} g_{\mathcal{A}}(p_0) \\ h(p_0) \end{pmatrix} \right) \right)^\perp,$$

gelten folgende Fehlerabschätzungen für den Fixpunkt  $\tilde{x}^{[\infty]}$  aus Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} \|v\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2), \\ \|x(p) - \tilde{x}^{[\infty]}(p)\| &= \|v\| + \mathcal{O}(\|\Delta p\|^3), \\ \|f(x(p), p) - f(\tilde{x}^{[\infty]}(p), p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^3), \\ \|g_{\mathcal{A}}(\tilde{x}^{[\infty]}(p), p)\| &= 0, \\ \|h(\tilde{x}^{[\infty]}(p), p)\| &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Bei Anwendung der Iterationsvorschrift auf die dualen Variablen

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{\mathcal{A}}^{[r+1]} &= \tilde{\lambda}_{\mathcal{A}}^{[r]} - \frac{d\lambda_{\mathcal{A}}}{d\varepsilon_k}(p_0, 0) g_{\mathcal{A}}(\tilde{x}^{[r]}, p) \text{ und} \\ \tilde{\mu}^{[r+1]} &= \tilde{\mu}^{[r]} - \frac{d\mu}{d\varepsilon_h}(p_0, 0) h(\tilde{x}^{[r]}, p) \end{aligned} \quad (2.46)$$

konvergieren diese gegen die Fixpunkte  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{A}}^{[\infty]}$  sowie  $\tilde{\mu}^{[\infty]}$  und es gelten die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \|\lambda_{\mathcal{A}}(p) - \tilde{\lambda}_{\mathcal{A}}^{[\infty]}(p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2), \\ \|\mu(p) - \tilde{\mu}^{[\infty]}(p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2), \\ \|\nabla_x L(\tilde{x}^{[\infty]}(p), \tilde{\lambda}^{[\infty]}(p), \tilde{\mu}^{[\infty]}(p), p)\| &= \mathcal{O}(\|\Delta p\|^2). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Algorithmus 1 und die Folgen aus den Gleichungen (2.46) konvergieren linear gegen die Fixpunkte  $\tilde{x}^{[\infty]}$ ,  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{A}}^{[\infty]}$  und  $\tilde{\mu}^{[\infty]}$ , die jeweils von der Störung  $p$  und dem Nominalparameter  $p_0$  abhängen.

**Beweis:** Büskens beweist diesen Satz ebenfalls in seiner Arbeit (vgl. [18], S. 41ff).  $\square$

**Bemerkung 2.2.9.** Da die Zeilen der Matrix  $\nabla_x \begin{pmatrix} g_A(p_0) \\ h(p_0) \end{pmatrix}$  auf Grund der Normalität der optimalen Lösung linear unabhängig sind, ist ihr Kern von der Dimension  $N_x - N_A$ , sodass der Fehler für  $\tilde{x}^{[k]}$  kleiner wird, je größer  $N_A$  wird. Für den Spezialfall  $N_x = N_A$  verbessert sich die Fehlerordnung für  $x$  auf  $\mathcal{O}(\|\Delta p\|^3)$ .

Durch die Zulässigkeitselbstkorrektur ist es also möglich, den Fehler in der Zulässigkeit (bis auf numerische Genauigkeit) vollständig zu eliminieren. Während die Fehlerordnung für die Zielfunktion und die primären Variable durch dieses Verfahren ebenfalls verbessert werden kann, bleibt diese für die dualen Variablen und Optimalitätsbedingung (2.13) gleich. Dies fällt allerdings bei der Bewertung nicht ins Gewicht, da für die praktische Anwendung der Wert der Zielfunktion und die Zulässigkeit von entscheidender Bedeutung sind (vgl. [18], S. 41).

## 2.3 Sequentielle quadratische Programmierung (Das lokale SQP-Verfahren)

Die Optimalitätsbedingungen nichtlinearer Optimierungsprobleme, insbesondere die notwendigen Bedingungen, bilden die Basis für numerische Verfahren zur Lösung dieser Probleme, wie dem Innere-Punkte-Verfahren oder dem SQP-Verfahren (vgl. [24]). Das SQP-Verfahren wurde nach Ideen von Wilson (vgl. [25]) entwickelt und in verschiedener Software wie SNOPT (vgl. [26]), FilterSQP (vgl. [27]) oder WORHP (vgl. [28]) erweitert und umgesetzt. Für die numerischen Ergebnisse dieser Arbeit wird WORHP verwendet, sodass an dieser Stelle die Grundidee des SQP-Verfahrens aufgezeigt wird. Anschaulich lässt sich diese an einem nichtlinearen Optimierungsproblem mit ausschließlich Gleichheitsnebenbedingungen

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{unter} \quad & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, N_h \end{aligned} \quad (2.48)$$

erläutern. Anhand dessen kann der Zusammenhang zum Newton-Verfahren hergestellt werden. Die notwendigen Bedingungen für dieses Problem können mit Hilfe der Lagrange-Funktion

$$L(x) = f(x) + \mu^T h(x) \quad (2.49)$$

und einer Hilfsfunktion

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x) \\ h(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.50)$$

ausgedrückt werden. Die Anwendung des Newton-Verfahrens auf Gleichung (2.50) liefert mit den Vorschriften

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} + d^{[k]} \quad (2.51)$$

$$\mu^{[k+1]} = \mu^{[k]} + \Delta\mu^{[k]} \quad (2.52)$$

das lineare Gleichungssystem

$$\Phi'(x^{[k]}, \mu^{[k]}) \begin{pmatrix} d^{[k]} \\ \Delta\mu^{[k]} \end{pmatrix} = -\Phi(x^{[k]}, \mu^{[k]}) \quad (2.53)$$

zur Bestimmung der nächsten Iterierten, mit der Jacobi-Matrix

$$\Phi'(x, \mu) = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x^{[k]}, \mu^{[k]}) & \nabla_x h(x^{[k]})^T \\ \nabla_x h(x^{[k]}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Ausmultiplizieren des Gleichungssystems (2.53) führt zu den Gleichungen

$$\nabla_{xx}^2 L(x^{[k]}, \mu^{[k]})d^{[k]} + \nabla_x h(x^{[k]})^T \Delta\mu^{[k]} = -\nabla_x f(x^{[k]}) - h(x^{[k]})^T \mu^{[k]}, \quad (2.55)$$

$$\nabla_x h(x^{[k]})d^{[k]} = -h(x^{[k]}), \quad (2.56)$$

die sich mit Gleichung (2.52) zu

$$\nabla_{xx}^2 L(x^{[k]}, \mu^{[k]})d^{[k]} + \nabla_x h(x^{[k]})\mu^{[k+1]} = -\nabla_x f(x^{[k]}), \quad (2.57)$$

$$\nabla_x h(x^{[k]})d^{[k]} = -h(x^{[k]}) \quad (2.58)$$

vereinfacht. Diese beiden Gleichungen (2.57) und (2.58) stellen die notwendige Bedingungen des quadratischen Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min_d \quad & \frac{1}{2}d\nabla_{xx}^2 L(x^{[k]}, \mu^{[k]})d^T + \nabla_x f(x^{[k]})^T d \\ \text{unter} \quad & h(x^{[k]}) + \nabla_x h(x^{[k]})^T d = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

dar. Die Lösung dieses Optimierungsproblems  $d^* = d^{[k]}$  wird als Abstiegsrichtung für das Newton-Verfahren verwendet und die zugehörige duale Variable  $\mu^* = \mu^{[k+1]}$  kann durch den Zusammenhang zu Gleichung (2.57) direkt als Update für die duale Variable des Ausgangsproblems verwendet werden. In jedem Iterationsschritt zur Lösung des Optimierungsproblems (2.48) wird also ein quadratisches Unterproblem gelöst, wodurch auch der Name der sequentiellen quadratischen Programmierung nachzuvollziehen ist (vgl. [17], S. 234ff).

Das Verfahren kann auf allgemeine NLP-Probleme der Form (2.1) erweitert werden. Der Zusammenhang mit dem Newton-Verfahren ist dabei zwar ebenfalls gegeben, da auch der Konvergenzbeweis auf die Konvergenz des Newton-Verfahren zurückführt, aber auf Grund der Komplementaritätsbedingung und der Vorzeichenbedingung für  $\lambda$  nicht so anschaulich. Es kann aber gezeigt werden, dass die Lösung des quadratischen Optimierungsproblems

$$\begin{aligned}
& \min_d \quad \frac{1}{2} d \nabla_{xx}^2 L(x^{[k]}, \lambda^{[k]}, \mu^{[k]}, p) d^T + \nabla_x f(x^{[k]}, p)^T d \\
& \text{unter} \quad \quad \quad g(x^{[k]}, p) + \nabla_x g(x^{[k]}, p)^T d \leq, \\
& \quad \quad \quad h(x^{[k]}, p) + \nabla_x h(x^{[k]}, p)^T d = 0,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

eine Abstiegsrichtung zu einem lokalen Minimum für das nichtlineare Optimierungsproblem  $NLP(p)$  mit festem Parameter  $p$  darstellt. Für den Beweis zur superlinearen und unter bestimmten Bedingungen quadratischen Konvergenz des lokalen SQP-Verfahrens bei Geiger und Kanzow (vgl. ebd.) wird die Hilfsfunktion

$$\Phi = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x^{[k]}, \lambda^{[k]}, \mu^{[k]}) \\ \min\{-g(x^{[k]}, \lambda^{[k]})\} \\ h(x^{[k]}) \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

verwendet, deren lokale stetige Differenzierbarkeit und Regularität ihrer Jacobi-Matrix  $\Phi'$  mit den strengen hinreichenden Optimalitätsbedingungen gezeigt werden kann. Damit ergibt sich wieder ein lineares Gleichungssystem für  $d^{[k]}$ , sowie  $\lambda^{[k+1]}$  und  $\mu^{[k+1]}$ , wie im Fall für ausschließlich gleichungsbeschränkte NLP. Dabei entspricht  $\Phi'$  im optimalen Punkt der KKT-Matrix (2.1.7), die für die Berechnung der Sensitivitäten verwendet wird. Allerdings wird im SQP-Verfahren nur die Matrix  $\Phi'(x^{[k]}, \lambda^{[k]}, \mu^{[k]})$  im vorherigen Punkt zur Berechnung von  $x^{[k+1]}, \lambda^{[k+1]}, \mu^{[k+1]}$  aufgebaut, sodass diese auch für die Sensitivitäten verwendet wird. Dadurch entsteht ein numerischer Fehler, der in der Praxis vernachlässigt werden kann.

**Bemerkung 2.3.1.** *Bei den Sensitivitätsdifferentialen  $\frac{dx}{dp}(p_0) \in \mathbb{R}^{N_x \times N_p}$ ,  $\frac{d\lambda}{dp}(p_0) \in \mathbb{R}^{N_g \times N_p}$ ,  $\frac{d\mu}{dp}(p_0) \in \mathbb{R}^{N_h \times N_p}$  und  $\frac{dz}{dp}(p_0) \in \mathbb{R}^{N_z \times N_p}$  handelt es sich jeweils um Matrizen. Die Berechnung der Sensitivitäten erfolgt dabei für jeden Störparameter einzeln durch das Lösen des linearen Gleichungssystems (2.27) bzw. (2.28) mit der KKT-Matrix und der jeweiligen rechten Seite. Dieses Gleichungssystem ist damit  $(N_x + N_g + N_h) \times (N_x + N_g + N_h)$  groß. Eine Faktorisierung der KKT-Matrix wird bereits im SQP-Verfahren benötigt. Dadurch wird der Aufwand für die Berechnung der Sensitivität einer primären oder dualen Variable oder einer Zugehörigkeitsfunktion nach einem Störparameter durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen bestimmt. Dieser liegt damit bei  $\mathcal{O}((N_x + N_g + N_h)^2)$  im Vergleich zum Aufwand von  $\mathcal{O}((N_x + N_g + N_h)^3)$  zu Faktorisierung einer Matrix (vgl. [29]). Die Angabe des Aufwandes in der Landau-Notation ohne Berücksichtigung von Vorfaktoren oder Anzahl der Nulleinträge in der Matrix ist nur als ungefähre Abschätzung des Aufwandes zu verstehen.*

Wie beim Newton-Verfahren ist der Konvergenzbeweis des SQP-Verfahrens nur in einer Umgebung um ein lokales Minimum gültig. Um die Konvergenz zu einem lokalen Minimum von einem beliebigen Startpunkt aus zu gewährleisten, ist eine Globalisierungsstrategie notwendig, wie sie auch für die Globalisierung des Newton-Verfahrens angewendet wird. Trotz des Begriffes kann damit weiterhin nur ein lokales Minimum für  $NLP(p_0)$  gefunden werden. Grundsätzlich zielen unterschiedliche Globalisierungsstrate-

gien darauf ab, bei der Bestimmung der Nächsten Iterierten nach Gleichung (2.51)  $x^{[k+1]}$  nicht automatisch den vollen Schritt  $d^{[k]}$  durchzuführen, sondern wie beispielsweise bei Liniensuch-Verfahren eine Schrittweite  $\alpha^{[k]}$  als Vorfaktor für  $d^{[k]}$  bestimmt. In Kombination mit der Armijo-Regel können Liniensuch-Verfahren mit Bewertungsfunktion für den Fortschritt einer Iterierten des SQP-Verfahrens  $x^{[k]}$  oder mit Filter-Verfahren realisiert werden (vgl. [24]).

Eine verbreitete Variante des SQP-Verfahrens stellt das BFGS-Verfahren dar. Dabei wird die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion  $\nabla_{xx}^2 L(x^{[k]})$  im quadratischen Unterproblem (2.60) durch geeignete symmetrische, positiv definite Matrix  $H^{[k]} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$  ersetzt. Dadurch wird die insbesondere in der hochdimensionalen Optimierung sehr aufwändige Berechnung der Hesse-Matrix mit finiten Differenzen vermieden. Durch dieses Verfahren kann eine superlineare Konvergenz erreicht werden. Die KKT-Matrix entspricht in dieser Variante allerdings nicht mehr der KKT-Matrix, die für die Berechnung der Sensitivitäten benötigt wird, sodass dieses Verfahren für die Sensitivitätsanalyse nicht angewendet werden kann (vgl. [24]).

## 3 Anwendung in elektrischen Netzwerken

Die in Kapitel 1 hergeleiteten Lastflussgleichungen (1.67) können als Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems aufgefasst werden, um beispielsweise die Spannungsstabilität des Netzwerkes, also die mittlere quadratische Abweichung vom Nominalwert zu minimieren. Diese Formulierung wird als optimale Lastflussberechnung oder Lastflussoptimierungsproblem bezeichnet und ist in der Literatur vor allem unter der englischen Bezeichnung *Optimal Power Flow* bekannt (vgl. zum Beispiel [12] oder [30]). Dazu werden die Gleichungen separat für Real- und Imaginärteil betrachtet, da dies keinen Einfluss auf die Lösung hat und für die numerische Lösung der Lastflussgleichungen mit und ohne Optimierung erforderlich ist. Fest vorgegebene Werte für Spannung und Leistung können als Parameter für die Optimierung betrachtet werden.

In diesem Kapitel wird zunächst ein allgemeines Lastflussoptimierungsproblem formuliert, in dem nicht festgelegt ist, welche Spannungen und welche Leistungen der Netzknoten Parameter des Problem sind, und welche Optimierungsvariablen. Anschließend werden die Optimierungsvariablen und Parameter des Problems im speziellen Lastflussoptimierungsproblem genauer spezifiziert, um, wie in Abschnitt 1.4.2 beschrieben, ein Netz zu betrachten, in dem fast alle Knoten (bis auf den oder die Bilanzknoten)  $P, Q$ -Knoten sind, d.h. Wirk- und Blindleistungen sind fest vorgegeben. Die Wirk- und Blindleistungen der Knoten werden dann als Parameter betrachtet und für die Sensitivitätsanalyse verwendet. Die letzten beiden Abschnitte dieses Kapitels spezifizieren, auf welche Art und Weise die Sensitivitäten im Kapitel 4 ausgewertet werden.

### 3.1 Allgemeines Lastflussoptimierungsproblem

Bevor das Problem der optimalen Lastflussberechnung formuliert wird, sei zunächst noch einmal an alle in den Lastflussgleichungen vorkommenden Größen in einem Netzwerk mit  $K \in \mathbb{N}$  Knoten erinnert:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Knotenspannungen:} & \underline{U} = (U_1 e^{j\varphi_1}, \dots, U_K e^{j\varphi_K})^T \in \mathbb{C}^K, \\
 \text{Knotenströme:} & \underline{I} = (I_1^{Re} + jI_1^{Im}, \dots, I_K^{Re} + jI_K^{Im})^T \in \mathbb{C}^K, \\
 \text{Knotenscheinleistungen:} & \underline{S} = (P_1 + jQ_1, \dots, P_K + jQ_K)^T \in \mathbb{C}^K, \\
 \text{Admittanzmatrix:} & \underline{Y} \in \mathbb{C}^{K \times K}.
 \end{array} \quad (3.1)$$

Komplexe Größen werden dabei wie zuvor mit einem Unterstrich dargestellt. Die Leistung  $\underline{S}$  und der Strom  $\underline{I}$  werden in Koordinatenform durch Real- und Imaginärteil dargestellt, während die Knotenspannung  $\underline{U}$  in Polarform verwendet wird, da das Kriterium für Spannungsstabilität im Netz nach Gleichung (1.68) durch den Betrag der Spannung

$U$  festgelegt ist. Zur Vereinfachung wird die Phase der Spannung  $\varphi_u$  nur mit  $\varphi$  bezeichnet, da die Spannung die einzige Größe ist, die in Polarkoordinaten angegeben wird.

Um zu verdeutlichen, dass bei der Lastflussberechnung einige der vorkommenden Größen konstante Werte sind, werden Betrag und Phase der Spannung, sowie Wirk- und Blindleistung in konstante Werte und freie Variablen aufgeteilt. Die konstanten Werte

$$\begin{aligned} U^c &:= (U_1^c, \dots, U_{C_U}^c)^T \in \mathbb{R}^{C_U}, \\ \varphi^c &:= (\varphi_1^c, \dots, \varphi_{C_\varphi}^c)^T \in \mathbb{R}^{C_\varphi}, \\ P^c &:= (P_1^c, \dots, P_{C_P}^c)^T \in \mathbb{R}^{C_P}, \\ Q^c &:= (Q_1^c, \dots, Q_{C_Q}^c)^T \in \mathbb{R}^{C_Q} \end{aligned} \tag{3.2}$$

sind dabei vor der Optimierung festgelegt und können als Parameter des Optimierungsproblems betrachtet werden, während die freien Variablen

$$\begin{aligned} U^v &:= (U_1^v, \dots, U_{K-C_U}^v)^T \in \mathbb{R}^{K-C_U}, \\ \varphi^v &:= (\varphi_1^v, \dots, \varphi_{K-C_\varphi}^v)^T \in \mathbb{R}^{K-C_\varphi}, \\ P^v &:= (P_1^v, \dots, P_{K-C_P}^v)^T \in \mathbb{R}^{K-C_P}, \\ Q^v &:= (Q_1^v, \dots, Q_{K-C_Q}^v)^T \in \mathbb{R}^{K-C_Q} \end{aligned} \tag{3.3}$$

die Optimierungsvariable des Problems bilden. Die reellen Vektoren  $U, \varphi, P, Q \in \mathbb{R}^K$  sind im Folgenden so zu verstehen, dass ein Eintrag entweder eine konstante oder eine variable Größe ist und die Einträge der komplexen Vektoren können sich aus konstanten und variablen Teilen zusammensetzen. Der Knotenstrom  $\underline{I}$  spielt bei der Netzwerkbeachtung ohnehin eine untergeordnete Rolle, wird aber in diesem System immer als freie Variable mit optimiert. Die Matrix  $\underline{Y}$  ist für alle weiteren Betrachtungen fest durch die in Kapitel 1 beschriebenen Netzkomponenten vorgegeben. Theoretisch ist es allerdings möglich auch Komponenten der Matrix, wie den Leitungsdurchmesser oder die Phasenverschiebung durch Phasenschiebertransformatoren zu optimieren. Dies ist aber für die Untersuchungen in dieser Arbeit nicht von Bedeutung.

Mit der beschriebenen Schreibweise wird das Optimierungsproblem zunächst in allgemeiner Form aufgestellt. Dabei wird die Voraussetzung festgelegt, dass die Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen kleiner oder gleich der Anzahl der Optimierungsvariablen ist, damit kein unterbestimmtes nichtlineares Gleichungssystem entsteht. Es sei  $C := C_U + C_\varphi + C_P + C_Q \in \mathbb{N}$  die Anzahl der konstanten Parameter. Die Lastflussgleichungen führen zu  $4K$  Gleichungsnebenbedingungen, sodass mit den  $2K$  Variablen für den Strom und  $4K - C$  Variablen für Spannung und Leistung die Voraussetzung

$$\begin{aligned} 4K &\leq 2K + 4K - C \\ \Rightarrow C &\leq 2K \end{aligned} \tag{3.4}$$

für die Anzahl der konstanten Werte gilt. Außerdem ist immer ein Bilanzknoten zu wählen, d.h.  $C_U, C_\varphi \geq 1$ , um damit einen Bezugspunkt für die in der Realität zeitlich variablen Spannungen in allen Knoten zu erhalten. Mögliche Beschränkungen der Optimierungsvariablen, so genannte Boxschränken, können dabei durch die Ungleichheitsnebenbedingungen ausgedrückt werden. Das Problem des optimalen Lastflusses kann damit im Allgemeinen wie folgt formuliert werden.

**Definition 3.1.1** (Allgemeines Lastflussoptimierungsproblem). *Mit den Definitionen (3.1), (3.2) und (3.3) sowie den Voraussetzungen (3.4) und  $C_U, C_\varphi \geq 1$  wird das Problem*

$$\begin{aligned}
& \min_{x \in \mathbb{R}^{n_x}} f(x, p) \\
& \text{unter} \quad (\underline{Y} \underline{U})^{Re} \quad -I^{Re} = 0, \\
& \quad (\underline{Y} \underline{U})^{Im} \quad -I^{Im} = 0, \\
& \quad \sqrt{3} (\underline{U} \circ \underline{I})^{Re} \quad -P = 0, \\
& \quad \sqrt{3} (\underline{U} \circ \underline{I})^{Im} \quad -Q = 0, \\
& \quad \quad \quad \quad \quad g(x) \leq 0, \\
& x = (I^{Re}, I^{Im}, U^v, \varphi^v, P^v, Q^v) \in \mathbb{R}^{6K-C}, \\
& p = (U^c, \varphi^c, P^c, Q^c) \in \mathbb{R}^C
\end{aligned} \tag{3.5}$$

als allgemeines Lastflussoptimierungsproblem bezeichnet. Der Operator „ $\circ$ “ kennzeichnet dabei die punktweise Multiplikation zweier Vektoren.

## 3.2 Das spezielle Lastflussoptimierungsproblem ohne Freiheitsgerade

Für die Anwendung des allgemeinen Lastflussoptimierungsproblems (3.5) auf eine konkrete Anwendung in einem speziellen Netz ist die Anzahl der freien Variablen und der konstanten Parameter anzupassen. In dieser Arbeit geht es dabei nicht vordergründig um das Lösen eines Optimierungsproblems, sondern um das Lösen der Lastflussgleichungen und die anschließende Untersuchungen der Sensitivitäten. Im in Kapitel 4 untersuchten Netz sind, wie in Kapitel 1 bereits erwähnt, sowohl für Erzeuger als auch für Verbraucher jeweils Wirk- und Blindleistung mit unterschiedlichem Vorzeichen festgelegt und Betrag und Phase der Spannung frei. Nur in den Bilanzknoten sind Betrag und Phase fest und Wirk- und Blindleistung frei. In einem Netzwerk mit  $K$  Knoten und  $B = C_U = C_\varphi \in \mathbb{N}$  Bilanzknoten ist die Anzahl der  $P, Q$ -Knoten damit gleich  $D = K - B = C_P = C_Q \in \mathbb{N}$ , wobei die Anzahl der Bilanzknoten  $B$  in der Regel sehr klein oder gleich 1 ist. Damit ist die komplexe Spannung in allen Knoten insgesamt entweder frei oder konstant. Für den Vektor der freien komplexen Spannungen aller  $P, Q$ -Knoten wird dann die Bezeichnung

$$\underline{U}^v = (\underline{U}_1^v, \dots, \underline{U}_D^v)^T := (U_1^v e^{j\varphi_1^v}, \dots, U_D^v e^{j\varphi_D^v})^T \tag{3.6}$$

verwendet. In den Bilanzknoten sind Betrag und Phase von  $\underline{U}$  konstant und die komplexe Spannung im Bilanzknoten wird mit

$$\underline{U}^c = (\underline{U}_1^c, \dots, \underline{U}_B^c)^T := (U_1^c e^{j\varphi_1^c}, \dots, U_B^c e^{j\varphi_B^c})^T \quad (3.7)$$

bezeichnet. Die Spannungen werden dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit so sortiert, dass die Bilanzknoten die letzten Einträge von

$$\underline{U} = (\underline{U}_1^v, \dots, \underline{U}_D^v, \underline{U}_1^c, \dots, \underline{U}_B^c)^T = (\underline{U}^v, \underline{U}^c)^T$$

darstellen, um das allgemeine Lastflussoptimierungsproblem auf Netzwerke mit ausschließlich  $P, Q$ -Knoten und Bilanzknoten zu modifizieren.

**Definition 3.2.1** (Spezielles Lastflussoptimierungsproblem). *Mit den Definitionen (3.1), (3.2), (3.3), (3.6) und (3.7) wird das Problem*

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^{n_x}} f(x, p) \\ & \text{unter} \quad (\underline{Y} \underline{U})^{Re} \quad -I^{Re} = 0, \\ & \quad (\underline{Y} \underline{U})^{Im} \quad -I^{Im} = 0, \\ & \quad \sqrt{3} (\underline{U}_\ell^v \cdot \underline{I}_\ell)^{Re} \quad -P_\ell^c = 0, \quad \ell = 1, \dots, D, \\ & \quad \sqrt{3} (\underline{U}_\ell^v \cdot \underline{I}_\ell)^{Im} \quad -Q_\ell^c = 0, \quad \ell = 1, \dots, D, \\ & \quad \sqrt{3} (\underline{U}_k^c \cdot \underline{I}_k)^{Re} \quad -P_k^v = 0, \quad k = 1, \dots, B, \\ & \quad \sqrt{3} (\underline{U}_k^c \cdot \underline{I}_k)^{Im} \quad -Q_k^v = 0, \quad k = 1, \dots, B, \\ & x = (I^{Re}, I^{Im}, U^v, \varphi^v, P^v, Q^v) \in \mathbb{R}^{4K}, \\ & p = (U^c, \varphi^c, P^c, Q^c) \in \mathbb{R}^{2K} \end{aligned} \quad (3.8)$$

als spezielles Lastflussoptimierungsproblem bezeichnet.

Das spezielle Lastflussoptimierungsproblem (3.8) ist kein echtes Optimierungsproblem mehr, sondern nur eine Umformulierung der Lastflussgleichungen (1.67), da für die  $4K$  freien Variablen  $4K$  Gleichungen vorgegeben werden. Für die Anzahl der konstanten Parameter insgesamt gilt dann  $C = 2D + 2B = 2K$ , wodurch die Voraussetzung (3.4) gerade mit Gleichheit erfüllt ist. In diesem Fall wird die Zielfunktion  $f$  nicht minimiert, sondern nur in der optimalen und einzig zulässigen Lösung ausgewertet und ist daher von untergeordneter Bedeutung. Im allgemeinen Lastflussoptimierungsproblem sind noch zusätzliche Ungleichheitsnebenbedingungen  $g(x)$  aufgeführt, in denen auch Boxschränken für die Optimierungsvariablen enthalten sind. Für das spezielle Lastflussoptimierungsproblem werden keine Ungleichheitsnebenbedingungen verwendet. Dadurch ist bei einer Veränderung von Parametern keine Änderung der Menge der aktiven Indizes möglich.

Diese Problemformulierung wird bereits in einem bestehenden Algorithmus zur Zielnetzplanung von Mittelspannungsnetzen verwendet und bietet den Vorteil, dass eine Optimierung durch das Hinzufügen von Freiheitsgeraden jederzeit möglich ist. Dieser Algorithmus wurde von der AG Optimierung und Optimale Steuerung der Universität

Bremen zusammen mit der IAV GmbH in Gifhorn [31] entwickelt. Die korrekte numerische Lösung der Lastflussgleichungen wurde durch einen Abgleich mit der für Lastflussberechnung anerkannten Software NEPLAN verifiziert (vgl. [32]). In Abschnitt 2.3 wurde gezeigt, dass das Newton-Verfahren, mit dem die Lastflussgleichungen normalerweise gelöst werden, und das SQP-Verfahren, das zur Lösung des Optimierungsproblems verwendet wird, eng zusammenhängen und daher durch diese Methode keine Nachteile bei der Konvergenz entstehen. In dieser Arbeit wird ein weiterer Vorteil dieser Problemformulierung ausgearbeitet, da die Sensitivitäten der freien Variablen, insbesondere der Spannung, in Bezug auf die festen Parameter, der Leistung, beim Anwenden des SQP-Verfahrens nur mit den in Bemerkung 2.3.1 erwähnten zusätzlichen Berechnungskosten für das Lösen des Gleichungssystems (2.27) zur Verfügung stehen.

Im speziellen Lastflussoptimierungsproblem (3.8) setzt sich der Parameter  $p$  fast ausschließlich aus den vorgegebenen Leistungen zusammen. Die konstanten Wirk- und Blindleistungswerte  $P^c$  und  $Q^c$  treten linear in den Nebenbedingungen auf, sodass eine Veränderung in der Leistung als lineare Störung in den Nebenbedingungen, wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, betrachtet werden kann. Phase und Winkel der Spannung im Bilanzknoten können zwar auch als Parameter angesehen werden, die Sensitivitäten sind aber für eine Netzwerkanalyse nicht von Bedeutung und werden daher nicht näher betrachtet. Die Sensitivitäten aller Nebenbedingungsgleichungen sind für den in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Algorithmus 1 der Zulässigkeitsselfkorrektur relevant. Durch Gleichung (2.34) können die Sensitivitäten der gesamten Optimierungsvariable  $x$ , die sich aus Betrag und Phase der Spannung in den Erzeuger- und Verbraucher-knoten, Real- und Imaginärteil der Knotenströme sowie Wirk- und Blindleistung des Bilanzknoten zusammensetzt, berechnet werden. Alle Gleichheitsnebenbedingungen von (3.8) werden in der Numerischen Auswertung wie in Kapitel 2 für allgemeine Optimierungsprobleme durch die Funktion  $h(x, p) : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}^{4K}$  ausgedrückt. Da das Augenmerk bei der Lastflussberechnung auf der Spannungsstabilität liegt, werden als erstes die Sensitivitäten des Betrags der Spannung in Bezug auf die Leistung untersucht, um zu validieren, wie gut die Sensitivitäten die Abhängigkeit der Spannung von der Leistung abbilden und damit einen Beitrag für die Analyse eines Netzwerks in Bezug auf die Spannungsstabilität leisten können.

### 3.3 Die parametrischen Sensitivitäten der Spannung im Bezug auf die Leistung

Explizit sind die Sensitivitätsableitungen des Betrags der Spannung in Bezug auf Wirk- und Blindleistung durch

$$\frac{dU^v}{dP^c}(P^0, Q^0) = \begin{pmatrix} \frac{dU_1^v}{dP_1^c} & \frac{dU_1^v}{dP_2^c} & \cdots & \frac{dU_1^v}{dP_D^c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dU_D^v}{dP_1^c} & \frac{dU_D^v}{dP_2^c} & \cdots & \frac{dU_D^v}{dP_D^c} \end{pmatrix} (P^0, Q^0) \in \mathbb{R}^{D \times D} \quad \left[ \frac{kV}{kW} \right] \quad (3.9)$$

und

$$\frac{dU^v}{dQ^c}(P^0, Q^0) = \begin{pmatrix} \frac{dU_1^v}{dQ_1^c} & \frac{dU_1^v}{dQ_2^c} & \cdots & \frac{dU_1^v}{dQ_D^c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dU_D^v}{dQ_1^c} & \frac{dU_D^v}{dQ_2^c} & \cdots & \frac{dU_D^v}{dQ_D^c} \end{pmatrix} (P^0, Q^0) \in \mathbb{R}^{D \times D} \quad \left[ \frac{kV}{kvar} \right] \quad (3.10)$$

mit den Nominalparametern für die Wirkleistung  $P^0 \in \mathbb{R}^D$  und die Blindleistung  $Q^0 \in \mathbb{R}^D$  gegeben. Diese werden in Kapitel 4 an einem Mittelspannungsnetzen mit realen Daten untersucht. Die Abhängigkeit vom Nominalparameter wird im Folgenden als gegeben vorausgesetzt und nur explizit angegeben, wenn es relevant ist. Jeder Eintrag dieser Matrizen gibt für die Spannung in dem zugehörigen Knoten an, wie stark sich diese in linearer Näherung verändert, wenn sich die Leistung in einem beliebigen Knoten des Netzes ändert. Die Einheit der einzelnen Einträge ist  $\left[ \frac{kV}{kW} \right]$  bzw.  $\left[ \frac{kV}{kvar} \right]$ . Da bei der Analyse von Netzen insgesamt die prozentuale Abweichung von der Nominalspannung betrachtet wird, sind die Sensitivitäten auch in Bezug auf die Nominalspannung zu betrachten, da diese nicht in allen Knoten gleich sein muss. Die Matrizen

$$\left( \frac{dU^v}{dP_1^c} \circ \frac{100}{U^{nom}}, \dots, \frac{dU^v}{dP_D^c} \circ \frac{100}{U^{nom}} \right) \quad \left[ \frac{\%}{kW} \right] \quad (3.11)$$

und

$$\left( \frac{dU^v}{dQ_1^c} \circ \frac{100}{U^{nom}}, \dots, \frac{dU^v}{dQ_D^c} \circ \frac{100}{U^{nom}} \right) \quad \left[ \frac{\%}{kvar} \right] \quad (3.12)$$

geben dann für jeden Knoten eine lineare Näherung an die prozentuale Spannungsänderung pro Kilowatt bzw. *kilo volt ampere reactive* Leistungsänderung in einem anderen Knoten an.  $\frac{dU^v}{dP_\ell^c} \circ \frac{100}{U^{nom}}$  bzw.  $\frac{dU^v}{dQ_\ell^c} \circ \frac{100}{U^{nom}}$  gibt dabei jeweils die  $\ell$ -te Spalte dieser Matrizen an.

Mit den Sensitivitätsableitungen ist es auch möglich bei einer vorgegebenen Leistungsänderung um  $\Delta P \in \mathbb{R}^D$  bzw.  $\Delta Q \in \mathbb{R}^D$  den Betrag der Spannung nach Gleichung (2.39) zu approximieren. Dadurch ergibt sich mit  $P^c = P^0 + \Delta P$  und  $Q^c = Q^0 + \Delta Q$  die

approximierte Spannung

$$\tilde{U}^v(P^c, Q^c) = U^v(P^0, Q^0) + \frac{dU^v}{dP^c} \Delta P + \frac{dU^v}{dQ^c} \Delta Q \quad (3.13)$$

und die approximierte Optimierungsvariable

$$\tilde{x}(P^c, Q^c) = x(P^0, Q^0) + \frac{dx}{dP^c} \Delta P + \frac{dx}{dQ^c} \Delta Q. \quad (3.14)$$

Die Approximation der Optimierungsvariable, in der zusätzlich zum Betrag der Spannung auch die Phase der Spannung, die Knotenströme und die Leistungen der Bilanzknoten enthalten sind, wird dabei explizit angegeben, da diese für die Bestimmung von Fehlern in der Approximation in der Auswertung ebenfalls berücksichtigt wird.

In einem Großteil der numerischen Auswertungen wird insbesondere die prozentuale Spannungsänderung in Bezug auf die Nominalspannung  $U^{nom} \in \mathbb{R}^D$

$$\tilde{d}_U := \left( \frac{dU^v}{dP^c} \Delta P + \frac{dU^v}{dQ^c} \Delta Q \right) \circ \frac{100}{U^{nom}} \in \mathbb{R}^D \quad [\%] \quad (3.15)$$

angegeben. Um zu analysieren, wie genau die Sensitivitäten die Änderung der Spannung durch Änderungen der Leistung abbilden, werden diese mit tatsächlichen Spannungsänderungen durch ein erneutes Lösen der Lastflussgleichungen verglichen. Diese ist dann durch  $U^v(P^c, Q^c)$  gegeben und die prozentuale Spannungsänderung wird durch

$$d_U := \left( U^v(P^c, Q^c) - U^v(P^0, Q^0) \right) \circ \frac{100}{U^{nom}} \in \mathbb{R}^D \quad [\%] \quad (3.16)$$

berechnet. Der Fehler in der Approximation ist dann gegeben durch:

$$e_U := d_U - \tilde{d}_U = \left( U^v(P^c, Q^c) - \tilde{U}^v(P^c, Q^c) \right) \circ \frac{100}{U^{nom}} \in \mathbb{R}^D \quad [\%]. \quad (3.17)$$

In dieser Analyse wird bewusst zuerst auf eine Zulässigkeitselbstkorrektur nach Algorithmus 1 verzichtet, um Aussagen darüber treffen zu können, wie gut die Sensitivitätsmatrizen selbst die Spannungsänderungen abbilden. Dazu wird insbesondere untersucht, inwiefern die Sensitivitäten bei großen Änderungen der Leistung in einzelnen Knoten die Spannungsänderungen noch approximieren können, obwohl durch den Sensitivitätssatz nur Änderungen in einer Umgebung um den Nominalparameter abgedeckt sind. Da der Sensitivitätssatz keine Auskunft über die Größe dieser Umgebung gibt, kann diese über die Änderung der Menge aktiven Indizes abgeschätzt werden (vgl. [18], S. 32 ff). Für die Lösung der Lastflussgleichungen (3.8) ist diese Abschätzung allerdings nicht möglich, weil nur Gleichheitsnebenbedingungen verwendet werden und die Menge sich damit nicht ändert. Die Fehler in den Nebenbedingungen sind dennoch ein weiteres wichtiges Kriterium für die Bewertung der Sensitivitätsapproximation. Diese können auch berechnet werden, ohne die tatsächliche Lösung zu kennen.

### 3.4 Starklast und Schwachlast

Um die elektrischen Übertragungsnetze so auszulegen, dass sie auch in Extremsituationen den Belastungen standhalten, werden die Lastflussberechnungen in der Regel für Extremfälle durchgeführt. Diese sind durch einen Starklast- und einen Schwachlastfall festgelegt. Bei Starklast werden 100 Prozent der Verbraucherleistungen berücksichtigt, während keine Leistung ins Netz eingespeist wird. Im Schwachlastfall werden 25 Prozent der Verbraucherleistungen und 100 Prozent der Erzeugerleistungen berücksichtigt. Sind die Verbraucherleistungen  $P^L, Q^L \in \mathbb{R}^D$  und die Erzeugerleistungen  $P^G, Q^G \in \mathbb{R}^D$  jeweils größer als 0 gilt für die Schwachlastleistungen (engl. *Low Load*)

$$P^{LL} = 0,25P^L - P^G \text{ und } Q^{LL} = 0,25Q^L - Q^G \quad (3.18)$$

und für die Starklastleistungen (engl. *Strong Load*)

$$P^{SL} = P^L - 0P^G \text{ und } Q^{SL} = Q^L - 0Q^G. \quad (3.19)$$

Diese können also durch

$$P^{LL} = P^{SL} + \underbrace{(-0,75P^L - P^G)}_{\Delta P} \text{ und } Q^{LL} = Q^{SL} + \underbrace{(-0,75Q^L - Q^G)}_{\Delta Q} \quad (3.20)$$

ineinander umgerechnet werden. Wird das Lastflussproblem (3.8) mit den Starklastleistungen  $P^{SL}$  und  $Q^{SL}$  als Nominalparameter gelöst, können die Sensitivitäten mit den oben definierten Störungen  $\Delta P$  und  $\Delta Q$  für eine Approximation der Lösung mit den Schwachlastleistungen verwendet werden. Mit der Lösung des Lastproblems im Starklastfall  $x^{SL} := x(P^{SL}, Q^{SL})$  ist die approximierte Lösung nach Gleichung (2.39) gegeben durch:

$$\tilde{x}^{LL} = x^{SL} + \frac{dx}{dP^c} \Delta P + \frac{dx}{dQ^c} \Delta Q. \quad (3.21)$$

Diese Lösung kann mit der Lösung des Lastflussproblems mit den Schwachlastleistungen  $x^{LL} := x(P^{LL}, Q^{LL})$  verglichen werden. An dieser Stelle wird auch die Approximation der gesamten Optimierungsvariable angegeben, da sie auch in der Auswertung des Fehlers verwendet wird. Die Approximation kann auch als Startschätzung für die Lösung des speziellen Lastflussoptimierungsproblems (3.8) im Schwachlastfall verwendet werden, um zu überprüfen, ob sich die Anzahl der Iterationen dadurch verringert. Zudem kann die Zulässigkeitsselbstkorrektur nach Algorithmus 1 verwendet werden, um die Lösung im Schwachlastfall zu verbessern. Da das spezielle Lastflussoptimierungsproblem in der verwendeten Form ausschließlich die Lösung der Lastflussgleichungen berechnet, kann die Güte der Approximation auch durch den Fehler in den Nebenbedingungen angegeben werden. Mit der Zulässigkeitsselbstkorrektur kann dieser Fehler unter eine festgelegte Schranke verkleinert werden. Daher wird untersucht, ob die Lösung im Schwachlastfall mit diesem Algorithmus vollständig mit den Sensitivitäten der Lösung des Starklastfalls zu berechnen ist. Dies ist nach der Theorie dann möglich, wenn der Sensitivitätssatz noch

gilt, obwohl die Störung dann stark vom Nominalparameter abweicht. Diese Lösung nach  $r$  Iterationen von Algorithmus 1  $(\tilde{x}^{LL})^{[r]}$  wird anschließend mit der tatsächlichen Lösung  $x^{LL}$  verglichen.

## 4 Numerische Auswertung

Die numerische Auswertung wird mit realen Daten eines 20 kV-Mittelspannungsnetzes aus Deutschland durchgeführt. Für die Lösung des Lastflussoptimierungsproblems (3.8) wird der NLP-Solver WORHP verwendet (vgl. [28]). Die Grundlagen des dabei verwendeten SQP-Verfahrens wurden in Kapitel 2 erläutert. Wie bereits erwähnt, ist das Lastflussoptimierungsproblem bereits im Algorithmus zur Zielnetzplanung der AG Optimierung und Optimale Steuerung integriert. Mit den Daten des verwendeten Mittelspannungsnetzes und den im Anhang angegebenen Parametern von WORHP konvergiert das Lastflussoptimierungsproblem (3.8) zu einer Lösung. Die Gleichheitsnebenbedingungen werden dabei bis auf eine Genauigkeit von  $\max(\|g_{\mathcal{A}}\|_{\infty}, \|h\|_{\infty}) \leq 10^{-6}$  eingehalten. Die Datei mit allen bei der Berechnung verwendeten Parametern von WORHP befindet sich im Anhang A.1. Der Wert der Zielfunktion ist für die Untersuchungen in dieser Arbeit nicht von Bedeutung. Für die parametrische Sensitivitätsanalyse wird das Modul WORHP Zen verwendet, das die Sensitivitäten der Nebenbedingungen ohne eine Modifizierung des Problems mit dem in Kapitel 2 angegebenen Gleichungssystem (2.34) berechnet (vgl. [33]). Lineare Approximationen der Lösung des gestörten Problems nach Gleichung (2.39) sind mit WORHP Zen ebenfalls möglich. Die Berechnungen wurden auf einem Rechner der AG Optimierung und Optimale Steuerung an der Universität Bremen durchgeführt. Die Daten des Rechners sind:

Betriebssystem: Linux, Ubuntu 16.04.3 LTS  
Prozessoren: 24 Intel(R) Xeon(R) CPU E5-4617 0 @ 2.90Ghz  
Arbeitsspeicher: 528.4 GB  
Compiler: gcc 4.9.0

Das Mittelspannungsnetz besteht aus  $K = 366$  Knoten mit einem Bilanzknoten ( $B = 1$ ) und  $D = 365$   $P, Q$ -Knoten. Ein Ersatzschaltplan dieses Netzes ist im Anhang in Abbildung A.1 zu finden. In einem Großteil der Knoten beträgt die Nominalspannung 20 kV. Durch im Netz befindliche Transformatoren befinden sich einige Knoten im Niederspannungsbereich mit einer Nominalspannung von 400 V bzw. 690 V. Dabei handelt es sich zum einen um „Eneuerbare-Energien-Erzeugungsanlagen“, wie beispielsweise Windkraft-, Photovoltaik- oder Biogasanlagen. Zum anderen sind in einigen Knoten Niederspannungs-Ortsnetztransformatoren vom Netzbetreiber nur zur Abfrage der Spannungen in die Simulation eingebaut. In diesen Knoten ist die angeschlossene Leistung immer gleich 0, da die Leistungen von Ortsnetzen immer insgesamt an Knoten mit 20 kV-Nominalspannung simuliert werden, wie in Kapitel 1 beschrieben. Die Konfiguration von Netzen ist von verschiedenen Parametern, wie der Einstellung der Transformatorstufe am Umspannwerk, und Faktoren für die Leistungen von Erzeugern und Verbrauchern

abhängig. Für die Untersuchungen wird eine realitätsnahe Konfiguration des Netzes verwendet, aus der der Starklastfall und der Schwachlastfall des Netzes abgeleitet werden können. Für die Nominalleistung des Netzes gilt daher  $P^0 = P^G - P^L$  und  $Q^0 = Q^G - Q^L$ . Für die Planung von Netzen sind zwar in der Regel nur die Extremfälle relevant, für die Analyse der Sensitivitäten sollen aber sowohl Verbraucher als auch Erzeuger berücksichtigt werden. Insgesamt ist die Konfiguration für die Untersuchung des prinzipiellen Nutzens der Sensitivitäten nicht entscheidend.

## 4.1 Vergleich der Sensitivitätsmatrix mit der Netzstruktur

Für die Auswertung der Ergebnisse werden zunächst die Sensitivitätsmatrizen selbst betrachtet. Dabei liegt der Fokus insbesondere auf den Sensitivitäten des Betrages der Spannung nach der Wirkleistung  $\frac{dU^v}{dP^c}$  (3.9), weil diese beiden Größen für die Struktur des Netzes die größte Bedeutung haben. Dabei wird insbesondere untersucht, ob die Näherungen der Spannungsänderungen in den einzelnen Knoten mit den Strukturen des Netzes übereinstimmen, d.h. insbesondere ob sich Leistungsänderungen nach Aussage der Sensitivitäten stärker auf die Spannung in benachbarten Knoten auswirken, als auf andere. Dazu wird für einen ersten Überblick zunächst die Sensitivitätsmatrix (3.9) des Netzes in Abbildung 4.1 farblich dargestellt. Die Pixelspalten des Bildes entsprechen den Spalten der Matrix, in der jeweils die Sensitivität aller Knotenspannung nach der Leistung in einem Knoten abzulesen ist. Die Pixelzeilen entsprechen den Zeilen der Matrix, die die Sensitivität der Spannung in einem Knoten zu Änderungen der Leistungen in jedem Knoten des Netzes darstellt. Die Farbe gibt die Größe der Sensitivitäten an.

Für die Analyse ist zunächst zu bemerken, dass die Reihenfolge der Knoten vom Einlesen abhängt. Im Regelfall sind Knoten, die im Netz nah beieinander liegen auch in den Einträgen der Spannungs- und Leistungsvektoren nah beieinander. Davon gibt es aber auch einige Ausnahmen. In der Darstellung der Matrix in Abbildung 4.1 sind mehrere Blöcke zu erkennen, die nahezu symmetrisch um die Diagonale angeordnet sind. Dass die Werte auf der Diagonalen insgesamt größer sind, als im Rest der Matrix, lässt darauf schließen, dass der Einfluss einer Leistungsänderung in einen Knoten selbst den größten Einfluss auf die Spannung in diesem Knoten hat. Die Symmetrie lässt darauf schließen, dass ein Knoten, dessen Spannung stark durch eine Leistungsänderung in einem anderen Knoten beeinflusst wird, in der Regel die Spannung in diesem Knoten ähnlich beeinflusst. Dass die gegenseitige Beeinflussung der Spannung bestimmter Knoten auf die Nähe der Knoten zueinander im Netz zurückzuführen ist, wird durch eine genauere Analyse von zwei symmetrischen Blöcken belegt.

Da die größten Werte der Sensitivitäten innerhalb der Knoten 69 bis 88 vorkommen, werden die Spalten der Sensitivitätsmatrix für diese Knoten als erstes separat untersucht. Dabei wird allerdings die auf die Nominalspannung normierte Sensitivitätsmatrix der prozentualen Spannungsänderungen pro Kilowatt (3.11) verwendet, um auch die

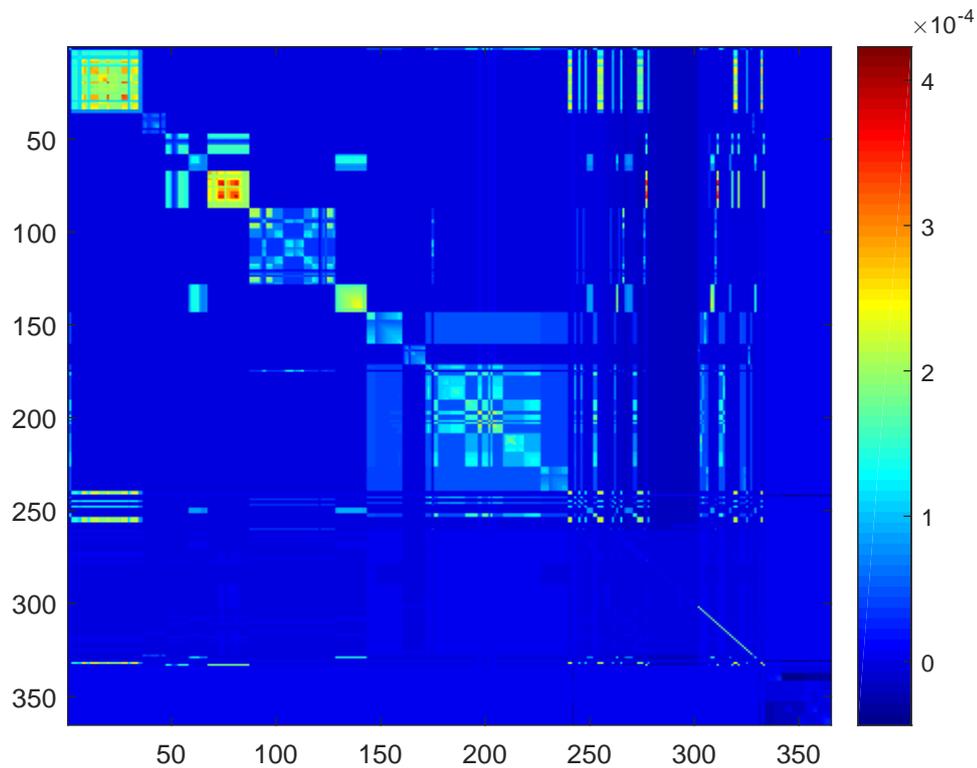


Abbildung 4.1: Sensitivitätsmatrix des Betrages der Spannung nach der Wirkleistung

Knoten im Niederspannungsbereich zu berücksichtigen. Die Darstellung der gesamten Matrix in dieser Form ist nicht sinnvoll, da dadurch die normierten Sensitivitäten in einigen Knoten im Niederspannungsbereich auf die Spannung im eigenen Knoten deutlich größer sind als im Rest des Netzes, obwohl diese für die Betrachtung der Spannung im Gesamtnetz keine Rolle spielen. Abbildung 4.2 zeigt den Netzausschnitt, in dem sich unter anderem die Knoten 69 bis 88 befinden. Die Lasten sind dabei durch ein Schaltsymbol wie in Abbildung 1.11b mit einem Pfeil dargestellt. Die roten Kästen sind eine stark verkleinerte Darstellung des rechten Erzeuger-Symbols in Abbildung 1.11a und symbolisieren kleinere Erzeuger, üblicherweise Photovoltaik-Anlagen. Einige Knoten, wie beispielsweise Knoten 74 sind reine Verbindungsknoten ohne angeschlossene Lasten. An Knoten 278 ist eine Windkraftanlage über einen Transformator an das Netz angeschlossen (linkes Erzeuger Symbol in Abbildung 1.11a). Die Knoten 312 und 322 sind Niederspannungs-Ortsnetztransformatoren. Die Lasten dieser Ortsnetze werden durch andere Knoten (hier 76 und 86) modelliert. Die größeren blau-grünen, dreieckigen Symbole repräsentieren große Lasten, bei denen damit gerechnet wird, dass sie in Zukunft an das Netz angeschlossen werden und die unter anderem dazu führen, dass eine Neuplanung des Netzes notwendig ist.

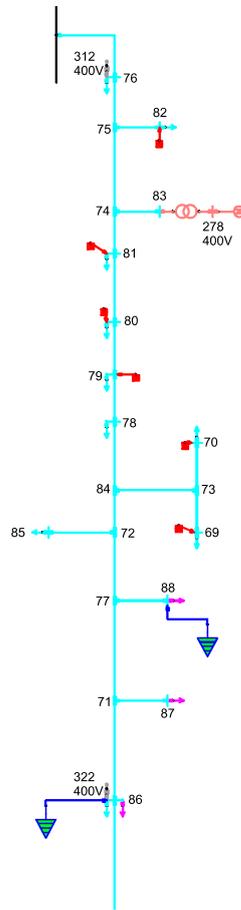


Abbildung 4.2: Netzausschnitt mit den Knoten 69 bis 88 (modifiziert nach [34])

In Abbildung 4.3 ist die Spalte 82 der normierten Sensitivitätsmatrix (3.11)  $\frac{dU^v}{dP_{82}^c} \circ \frac{100}{U_{nom}}$  [%] als Prozentwert dargestellt. Der 82. Eintrag dieser Spalte ist betragsmäßig absolut der größte Wert in der gesamten Matrix (3.9) und relativ zur Nominalspannung der größte relevante Wert. Die Werte dieses Vektors sind so zu interpretieren, dass jeder Eintrag in linearer Näherung die prozentuale Spannungsänderung in Bezug auf die Nominalspannung in dem jeweiligen Knoten des Netzes angibt, wenn sich die Leistung in Knoten 82 um ein Kilowatt ändert. Eine Leistungsänderung hat also die größten Auswirkungen auf die Spannung in genau diesem Knoten. Die Sensitivitätsableitungen der im Netz an der selben Leitung liegenden Knoten 69 bis 88, sowie 278, 312 und 322 sind ebenfalls deutlich größer als die der anderen Knoten, die nahezu bei 0 liegen. Die Sensitivitäten der Einträge 49 bis 59 des Vektors sind in der Grafik ebenfalls noch deutlich zu erkennen. Diese Knoten befinden sich in einer direkt benachbarten Leitung zu der in Abbildung 4.2 dargestellten Leitung, wie in der Abbildung des Gesamtnetzes A.1 zu erkennen ist.

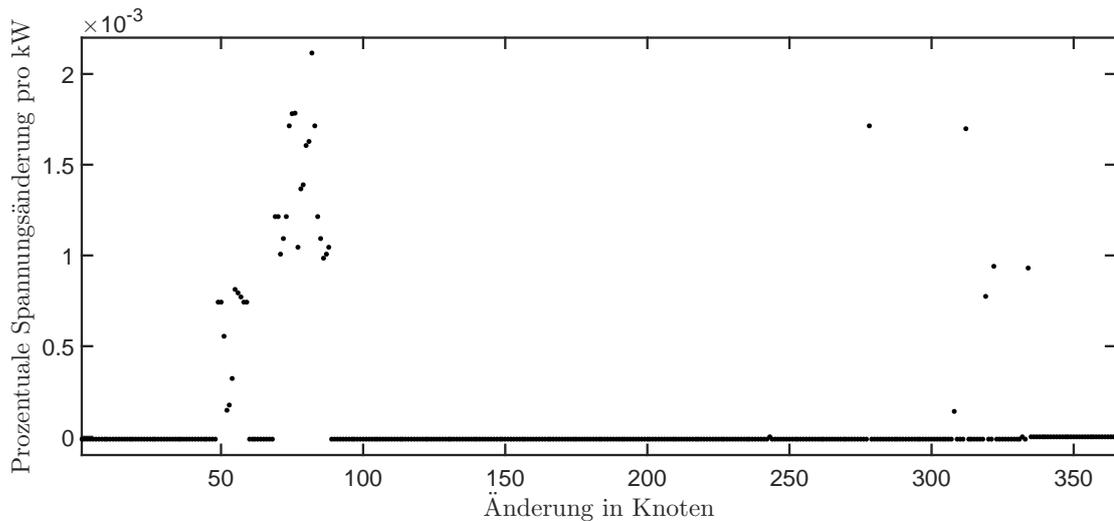


Abbildung 4.3: Grafische Darstellung der Spalte 82 der normierten Sensitivitätsmatrix (3.9)

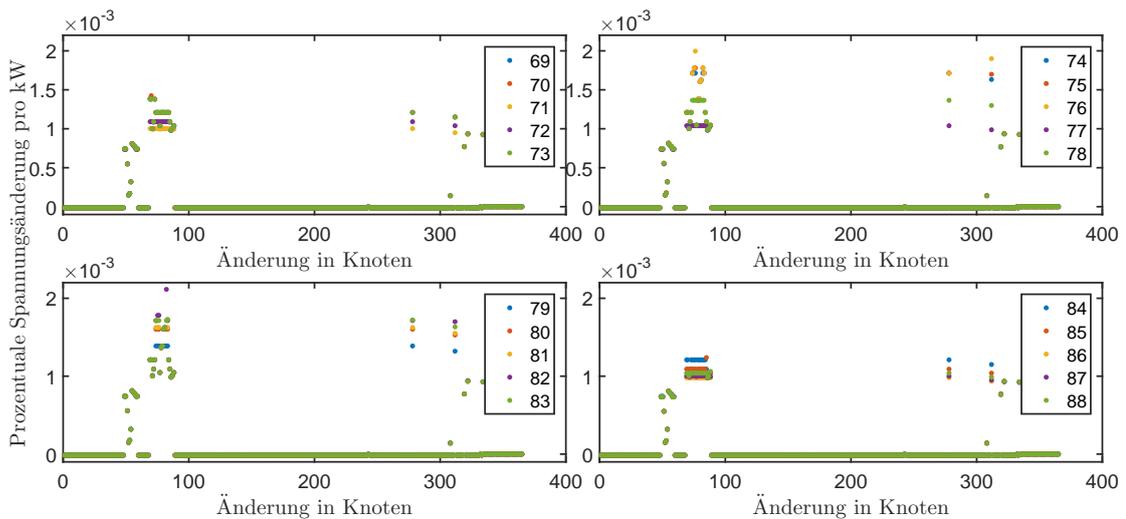


Abbildung 4.4: Grafische Darstellung der Spalten 69 bis 88 der Sensitivitätsmatrix (3.9)

In Abbildung 4.4 sind in jeder Grafik je fünf Spalten der normierten Matrix (3.11) dargestellt. Die Aufteilung in einzelne Grafiken dient dabei einzig der Übersichtlichkeit. Die Punkte einer Farbe gehören dabei zu einer Spalte, sodass dadurch jeweils die Ableitung nach der Leistung in einem der Knoten 69 bis 82 dargestellt ist. Da in einigen dieser Knoten keine Lasten oder Erzeuger angeschlossen sind, wären Leistungsänderungen in diesen Knoten allerdings nicht zu erwarten. Dennoch ist an dieser Darstellung zu erkennen, dass die Sensitivitäten die Netzstruktur widerspiegeln, da eine Leistungsänderung

in einem Knoten insbesondere Auswirkungen auf die Spannung in benachbarten Knoten hat.

Im Anhang sind in Abbildung A.3 auf die gleiche Art und Weise wie in Abbildung 4.4 je fünf bzw. sechs Spalten der normierten Matrix (3.11) dargestellt. Auch diese Knoten liegen alle entlang einer Leitung, deren Netzausschnitt im Anhang in Abbildung A.2 gezeigt wird. Eine Leistungsänderung in einem der Knoten dieser Leitung beeinflusst fast ausschließlich die Spannung in den Knoten entlang dieser oder benachbarter Leitungen. Die Analyse weiterer Sensitivitäten einzelner Leitungen des Netzes führt zu ähnlichen Ergebnissen und es ist insgesamt festzustellen, dass diese durch die Struktur des Netzes zu erklären sind.

Die Matrix der Sensitivitätsableitungen nach der Blindleistung ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Diese ist von der Struktur fast genauso aufgebaut, wie die Sensitivitätsmatrix nach den Wirkleistungen, aber einige Werte, insbesondere solche, die vorher fast 0 oder klein waren, sind in dieser Matrix größer. Dennoch ist der Bereich, in der die Werte liegen, nahezu identisch und auch Blindleistungsänderungen führen vor allem zu Spannungsänderung in benachbarten Knoten.

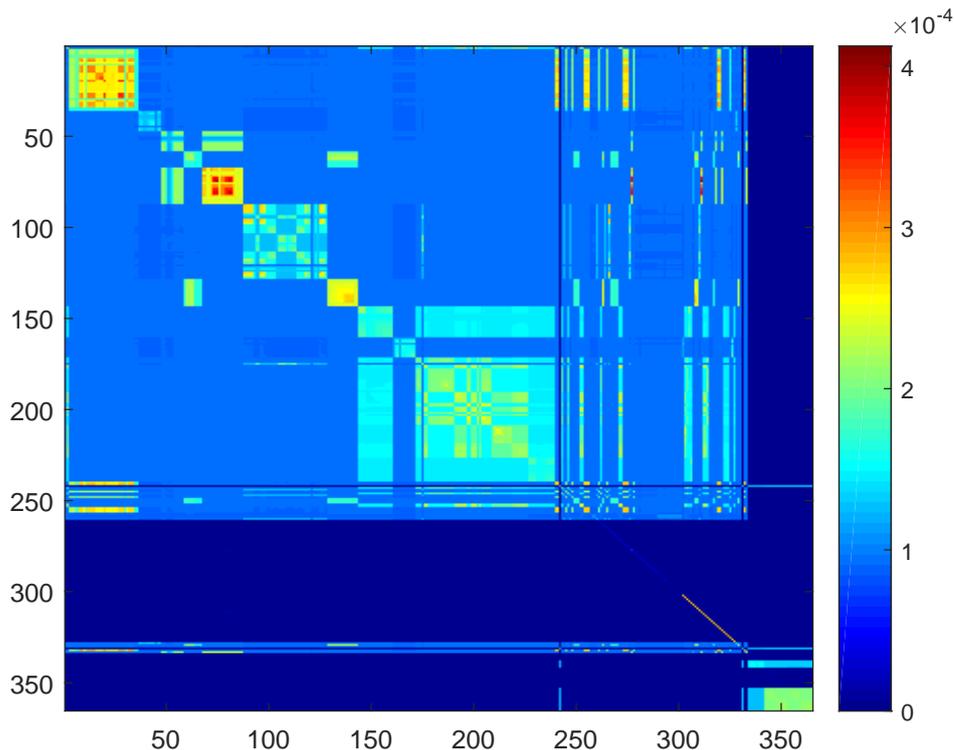


Abbildung 4.5: Sensitivitätsmatrix des Betrages der Spannung nach der Blindleistung

## 4.2 Vergleich der Approximationen mit erneuten Lastflussberechnungen

Um zusätzlich zu der Struktur der Sensitivitätsmatrix auch die Größenordnung der Sensitivitäten zu validieren, werden die durch Sensitivitäten in erster Ordnung angenäherten Spannungsänderungen mit den tatsächlichen Spannungsänderungen anhand der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Methode miteinander verglichen.

Als erstes werden dazu noch einmal die Knoten der in Abbildung 4.2 dargestellten Leitung verwendet. An allen Knoten dieser Leitung, an denen eine Last angeschlossen ist, werden die Verbraucherleistungen erst um 10% erhöht und dann vom Ausgangswert um den gleichen Betrag verringert. Für diese Leistungen in den Knoten  $V = \{69, 70, 76, 78, \dots, 82, 85, \dots, 88\}$  gilt dann

$$P_\ell^c = P_\ell^0 + \underbrace{(\pm P_\ell^0 \cdot 0,1)}_{\Delta P_\ell^\pm} \quad \forall \ell \in V, \quad (4.1)$$

$$Q_\ell^c = Q_\ell^0 + \underbrace{(\pm Q_\ell^0 \cdot 0,1)}_{\Delta Q_\ell^\pm} \quad \forall \ell \in V, \quad (4.2)$$

die in diesem Fall jeweils negativ sind, da die Verbraucherleistung in diesen Knoten größer ist als die erzeugte Leistung. Daher entsprechen die negativen Abweichungen  $\Delta P_\ell^-$  und  $\Delta Q_\ell^-$  jeweils einer Erhöhung der Verbraucherleistung in Knoten  $\ell$  und die positiven Abweichungen  $\Delta P_\ell^+$  und  $\Delta Q_\ell^+$  einer Verringerung. Gleichmaßen können diese auch als Verringerung bzw. Erhöhung der Erzeugerleistung verstanden werden. In allen anderen Einträgen  $\ell \notin V$  sind  $\Delta P_\ell = 0$  und  $\Delta Q_\ell = 0$  und die gesamten Störungsvektoren werden mit  $\Delta P^-, \Delta P^+, \Delta Q^-, \Delta Q^+ \in \mathbb{R}^D$  bezeichnet.

Für diese Störungen werden die approximierten Spannungsänderungen mit den Sensitivitäten  $\tilde{d}_U \in \mathbb{R}^D$  nach Gleichung (3.15) und die tatsächlichen Spannungsänderungen durch ein erneutes Lösen der Lastflussgleichungen  $d_U \in \mathbb{R}^D$  mit Gleichung (3.16) berechnet. Außerdem wird der Fehler zwischen diesen beiden Berechnungen (Gleichung (3.17)) ermittelt. Die Spannungsänderungen bei einer Erhöhung der Verbraucherleistung werden in Abbildung 4.6 dargestellt und der dazugehörige Fehler in Abbildung 4.7 aufgetragen. Bei einer Verringerung der Verbraucherleistung sind die Spannungsänderungen und der Fehler in den Abbildungen 4.8 und 4.9 dargestellt. In den Abbildungen 4.6 und 4.8 geben die roten Punkte jeweils die durch die Sensitivitäten approximierte Spannungsänderung an und die schwarzen Punkten die durch eine erneute Lastflussberechnung ermittelte tatsächliche Spannungsänderung. Ein Punkt gibt dabei den Wert für die Spannungsänderung in einem Knoten des Netzes an, dessen Index der Wert auf der x-Achse zeigt. In Abbildung 4.6 ist zu erkennen, dass sich die Spannung bei einer Erhöhung der Verbraucherleistung in allen an der in Abbildung 4.2 dargestellten Leitung um 0,25 – 0,3% absenkt. Die tatsächliche Spannungsänderung ist dabei besonders in den Knoten dieser Leitung etwas geringer als die approximierte Spannungsänderung. Dies zeigt auch der in

Abbildung 4.7 dargestellte Fehler  $e_U \in \mathbb{R}^D$  in Prozentpunkten, da die Differenz entweder größer als 0 oder ungefähr gleich 0 ist. Insgesamt liegt der maximale Fehler zwischen der tatsächlichen und der approximierten Spannungsänderung unter 0,03 %.

Wird die Verbraucherleistung um 10 % verringert, verhalten sich die Spannungen in den einzelnen Knoten fast genauso wie bei der Erhöhung, nur mit umgekehrtem Vorzeichen. Die Spannung erhöht sich in den Knoten der betrachteten Leitung um 0,25 – 0,3 % und die Differenz zwischen tatsächlicher und approximierter Spannungsänderung ist kleiner oder ungefähr gleich 0. Betragsmäßig ist der Fehler in beiden Fällen fast identisch. Im Verhältnis zu den tatsächlichen Spannungsänderungen liegt dieser damit in allen Knoten unter 10 %. Die Berechnungen zeigen folglich, dass sich die tatsächlichen Spannungsänderungen so verhalten wie von den Sensitivitäten erwartet, da der Fehler bei Leistungsänderungen in beide Richtungen sehr gering ist.

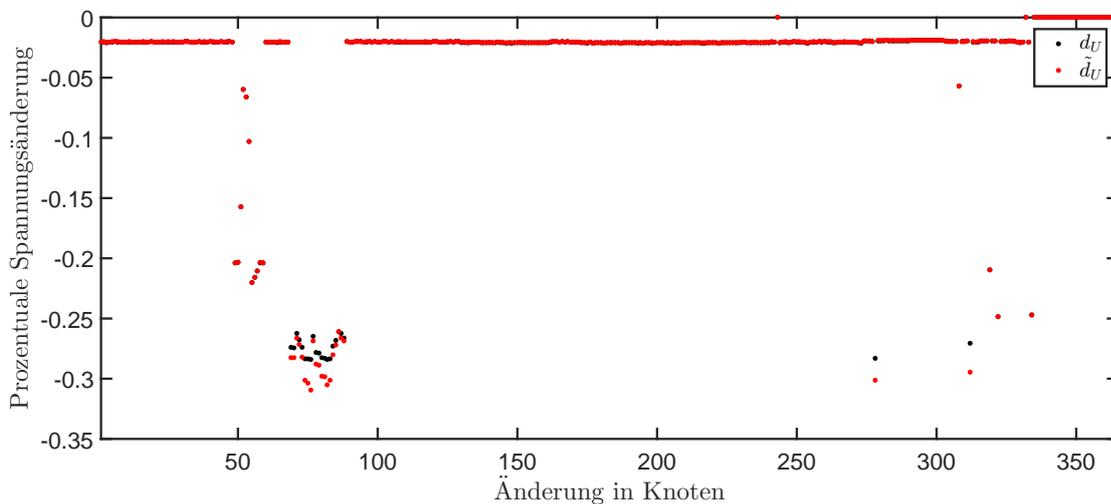


Abbildung 4.6: Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei einer Störung mit  $\Delta P^-$  und  $\Delta Q^-$

Als zweites wird eine Leistungsänderung in nur einem einzigen Knoten untersucht. Dabei werden auch sehr große Störungen betrachtet, um zu überprüfen, wie gut die Sensitivitäten die tatsächliche Spannungsänderung auch bei großen Änderungen der Leistung abbilden. In Knoten 28, der sich im in Abbildung A.2 dargestellten Netzausschnitt (im Anhang) befindet, ist eine potentielle zusätzliche Last von mehreren Megawatt geplant. Eine Leistungsänderung in diesem Knoten hat nach den Sensitivitäten relativ starken Einfluss auf die Spannung in vielen anderen Knoten. Es wird analysiert, ob und wie gut die Sensitivitäten auch große Leistungsänderungen noch abbilden können. Dazu werden Leistungsänderungen in diesem Knoten von  $\Delta P_{28} = -100 \text{ kW}$ ,  $\Delta P_{28} = -500 \text{ kW}$  und  $\Delta P_{28} = -4000 \text{ kW}$  untersucht, wobei der letzte Wert die Verbraucherleistung mehr

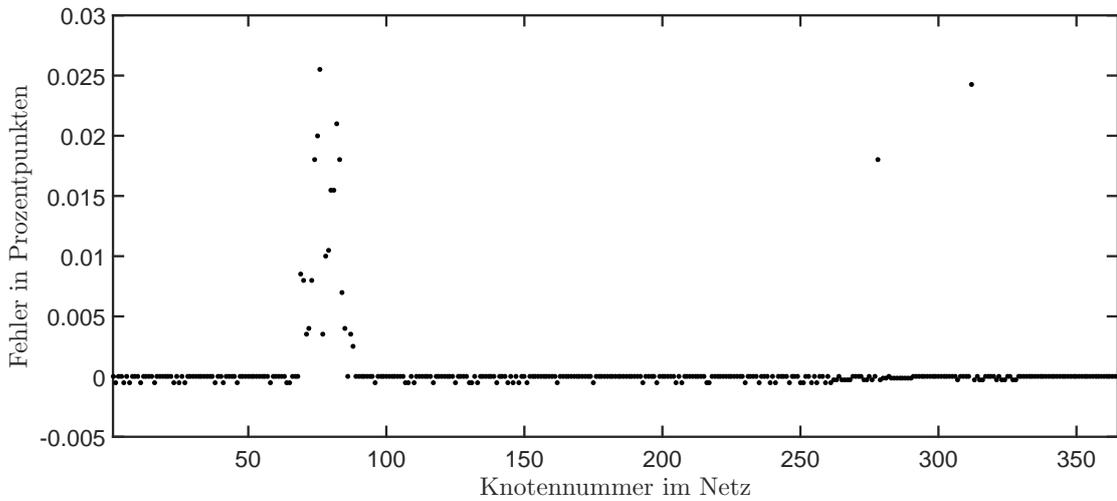


Abbildung 4.7: Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei einer Störung mit  $\Delta P^-$  und  $\Delta Q^-$

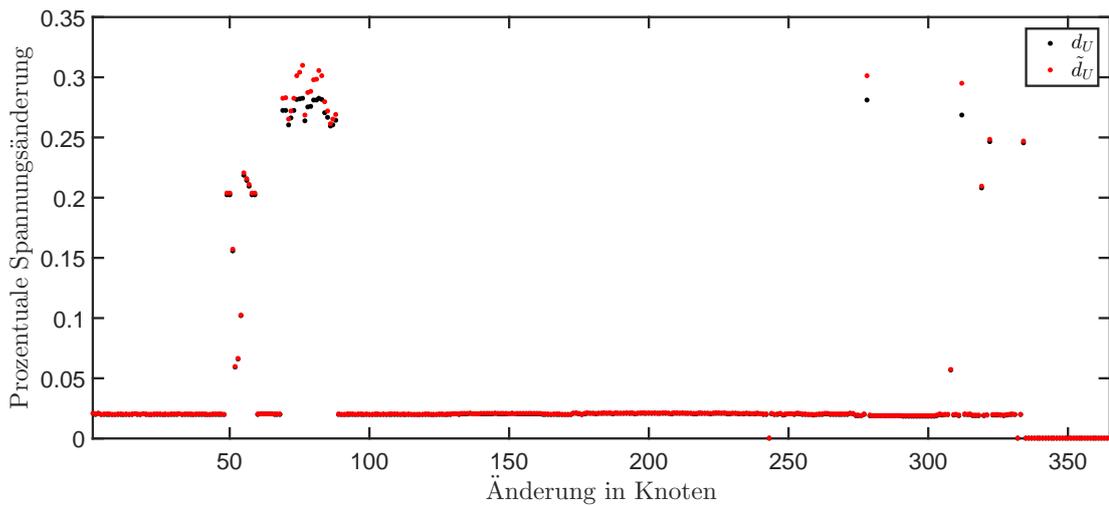


Abbildung 4.8: Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei einer Störung mit  $\Delta P^+$  und  $\Delta Q^+$

als verdoppelt und gerade die Leistung einer zusätzlichen Last im Megawattbereich ausdrückt.  $\Delta P$  ist dabei in allen anderen Einträgen und  $\Delta Q$  in allen Einträgen gleich 0. Wie zuvor wird die prozentuale Spannungsänderung nach den Gleichungen (3.15) und (3.16) sowie der Fehler (3.17) berechnet. Die roten Punkte geben wieder die approximierter Spannungsänderung  $\tilde{d}_U$  und schwarzen Punkte die tatsächlichen Spannungsänderungen  $d_U$  in den Knoten des Netzes an. In Abbildung 4.10 ist dabei kaum ein Unterschied

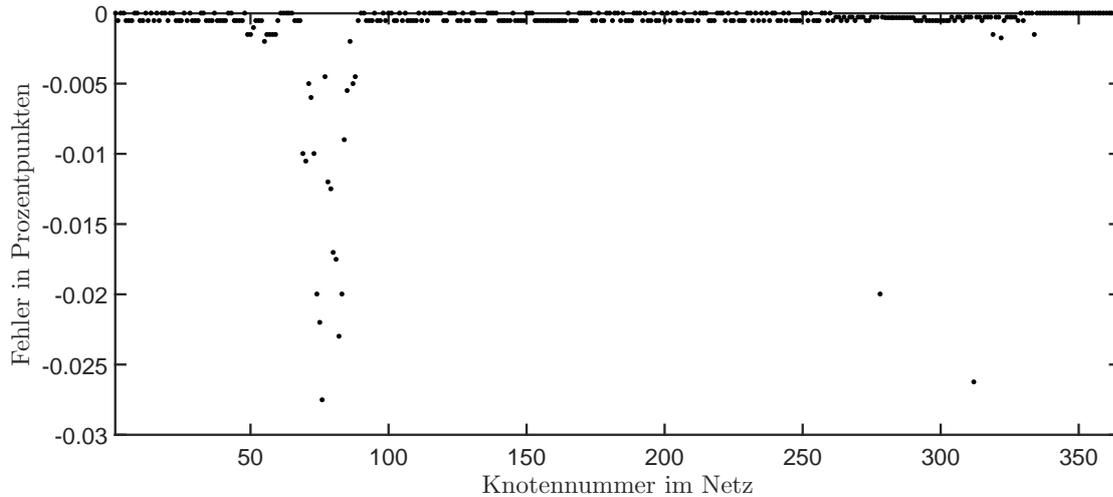


Abbildung 4.9: Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei einer Störung mit  $\Delta P^+$  und  $\Delta Q^+$

zwischen der approximierten und der tatsächlichen Spannungsänderung zu erkennen. Der Fehlerplot in Abbildung 4.11 zeigt, dass sich dieser betragsmäßig ungefähr in einer Größenordnung von  $10^{-4}$  [%] befindet und dabei relativ gleichmäßig über alle Knoten verteilt ist. Diese Verteilung ändert sich, wenn die Leistungsänderung größer wird, wie an den Abbildungen 4.13 und 4.15 zu erkennen ist. Dann ist der Fehler in den Knoten am größten, in denen auch die Spannungsänderung groß ist. Der Fehler liegt betragsmäßig maximal bei knapp über 0,01 % und damit relativ zur größten tatsächlichen Spannungsänderung von ungefähr 0,9 % bei unter einem Prozent.

Bei einer Leistungsänderung von mehreren Megawatt, wie durch  $\Delta P_{28} = -4000$  kW, ändert sich die Spannung in den umliegenden Knoten um mehr als 5 %, sodass dadurch die Spannungsgrenze in jedem Fall überschritten wird und eine Neuplanung des Netzes erforderlich ist. Eine derart große Änderung der Spannung durch die Leistung lässt sich nicht mehr mit hoher Genauigkeit durch die Sensitivitäten abbilden. Der Fehler in der Approximation liegt allerdings in jedem Knoten immer noch bei unter einem Prozent und der Fehler relativ zur größten maximalen Spannungsänderung von fast 8 % liegt bei unter 10 %. Abbildung 4.14 zeigt jedoch, dass das Verhältnis der Spannungsänderung innerhalb der einzelnen Knoten weiterhin durch die Sensitivitäten abgebildet werden kann. Die approximierten Spannungsänderungen, die durch die roten Punkte angegeben werden, liegen zwar insgesamt deutlich unter den schwarzen Punkten der tatsächlichen Spannungsänderungen. Aber es ist zu erkennen, dass je größer eine approximierte Spannungsänderung betragsmäßig in einem Knoten ist, desto größer ist auch die tatsächliche Spannungsänderung im Verhältnis zu den anderen Knoten.

Wird für diese Störungen die Optimierungsvariable durch Gleichung (3.14) approximiert, so kann der Fehler in den Nebenbedingungen  $h(\tilde{x}, p)$  berechnet werden. Dieser Fehler aller Nebenbedingungen ist in den Abbildungen 4.16 - 4.18 aufgetragen. Der Wert auf der x-Achse entspricht dabei dem Index der Nebenbedingungen und der Wert auf der y-Achse gibt den Wert der jeweiligen Gleichheitsnebenbedingung an. Die durch eine rote Umrandung markierten Punkte geben die Werte der Nebenbedingungen für die Leistung von Knoten 28

$$\sqrt{3} (\tilde{U}_{28}^v \cdot \tilde{I}_{28})^{Re} - P_{28}^c \text{ und } \sqrt{3} (\tilde{U}_{28}^v \cdot \tilde{I}_{28})^{Im} - Q_{28}^c$$

an. Diese sind bei allen drei Störungen deutlich stärker verletzt, als alle anderen Nebenbedingungen. Eine Erklärung dafür liefern nicht die Knotenspannungen, die sich, wie die vorherigen Betrachtungen zeigen, in einigen Knoten ähnlich stark verändern, sondern die Knotenströme. Wie in Abschnitt 1.4.2 erläutert, hängen die Leistung und der Knotenstrom in einem Knoten direkt zusammen, sodass die Wirkleistungsänderung in Knoten 28 deutlich stärkere Auswirkungen auf den Knotenstrom in diesem Knoten hat, als auf alle anderen Knoten. Der Approximationsfehler des Knotenstroms  $\tilde{I}_{28} - I_{28}$  in diesem Knoten ist ebenfalls größer als in allen anderen Knoten, sodass die Nebenbedingung, in dem sowohl der Approximationsfehler der Spannung als auch des Knotenstromes groß ist, am stärksten verletzt ist. Da der Knotenstrom für das Netz insgesamt kein große Bedeutung hat, ist der Approximationsfehler für diesen auch in der Bewertung nicht entscheidend. Der Fehler in den Nebenbedingung wird dadurch allerdings beeinflusst. Insgesamt vergrößert sich der Fehler in den Nebenbedinungen, wenn die Störung  $\Delta P_{28}$  vergrößert wird, wie in den Tabellen 4.1 und 4.2 jeweils in der vierten Spalte in unterschiedlichen Normen zu erkennen ist. Der Fehler in den Nebenbedingungen ist berechenbar ohne die Lösung des gestörten Optimierungsproblems zu kennen und daher auch für die Bewertung der Approximation der Lösung verwendbar, wenn die tatsächliche Lösung nicht als Vergleichsgröße vorliegt.

Außerdem kann der Fehler in den Nebenbedingungen, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, durch Algorithmus 1 für die Zulässigkeitsselbstkorrektur genutzt und verringert werden. Für die drei betrachteten Störungen wird eine Zulässigkeitsselbstkorrektur mit der Schranke für den Fehler in den Nebenbedingungen  $\delta = 10^{-6}$  durchgeführt. Der Approximationsfehler der Optimierungsvariable, des Betrags der Spannung und der Fehler in den Nebenbedingungen werden bei einer einfachen Approximation (Spalten 2-4) und nach Anwendung von Algorithmus 1 (Spalten 6-8) in den Tabellen 4.1 in der 2-Norm und 4.2 in der Maximums-Norm aufgeführt. In Spalte 1 ist die Größe der Störung und in Spalte 5 die Anzahl der Iterationen  $r$  von Algorithmus 1 angegeben. Die Ergebnisse zeigen, dass es möglich ist, die Lösung durch die Zulässigkeitsselbstkorrektur sehr genau zu approximieren, da unabhängig von der Größe der Störung der Fehler in beiden Normen in der Optimierungsvariable  $x$ , in der Spannung  $U^v$  und in den Nebenbedingungen nach  $r$  Iterationen auf eine Größenordnung von  $10^{-6}$  bis  $10^{-8}$  reduziert wird. Der Fehler in den Spalten 2-4 für die einfachen Approximationen ist in beiden Normen je größer, desto größer die Störung ist, wie bereits anhand der Abbildungen 4.10 - 4.18 zu erkennen

war.

$\Delta P_{28}$	$\ \tilde{x} - x\ $	$\ \tilde{U}^c - U\ $	$\ h(\tilde{x})\ $	$r$	$\ \tilde{x}^{[r]} - x\ $	$\ \tilde{U}^{c^{[r]}} - U\ $	$\ h(\tilde{x}^{[r]})\ $
-100	$4,94e^{-4}$	$4,41e^{-4}$	$2,29e^{-4}$	3	$2,24e^{-6}$	$2,0e^{-6}$	$8,84e^{-7}$
-500	$1,25e^{-2}$	$1,11e^{-2}$	$5,71e^{-2}$	5	$1,53e^{-7}$	$1,26e^{-7}$	$2,27e^{-8}$
-4000	$9,25e^{-1}$	$8,28e^{-1}$	$3,6e^{-1}$	9	$1,24e^{-6}$	$1,13e^{-6}$	$4,25e^{-7}$

Tabelle 4.1: Approximationsfehler mit und ohne Zulässigkeitsselbstkorrektur in der 2-Norm

$\Delta P_{28}$	$\ \tilde{x} - x\ _\infty$	$\ \tilde{U}^c - U\ _\infty$	$\ h(\tilde{x})\ _\infty$	$r$	$\ \tilde{x}^{[r]} - x\ _\infty$	$\ \tilde{U}^{c^{[r]}} - U\ _\infty$	$\ h(\tilde{x}^{[r]})\ _\infty$
-100	$1,65e^{-4}$	$8,53e^{-5}$	$1,64e^{-4}$	3	$8,56e^{-7}$	$3,4e^{-7}$	$7,7e^{-7}$
-500	$4,18e^{-3}$	$2,16e^{-2}$	$4,1e^{-3}$	5	$6,58e^{-8}$	$1,49e^{-8}$	$2,01e^{-8}$
-4000	$3,06e^{-1}$	$1,16e^{-1}$	$2,69e^{-1}$	9	$4,26e^{-7}$	$2,07e^{-7}$	$3,62e^{-7}$

Tabelle 4.2: Approximationsfehler mit und ohne Zulässigkeitsselbstkorrektur in der Maximums-Norm

Dass eine Zulässigkeitsselbstkorrektur auch möglich ist, wenn die Störung wie bei  $\Delta P_{28} = -4000$  kW sehr groß ist, lässt darauf schließen, dass diese trotzdem noch in der vom Sensitivitätssatz geforderten Umgebung um den Nominalparameter  $P^0$  liegt. Der Vergleich zwischen dem Fehler in den Nebenbedingungen und in der optimalen Lösung zeigt auch, dass diese jeweils in der gleichen Größenordnung liegen und der Fehler in den Nebenbedingungen für die Bewertung auch geeignet ist. Im untersuchten Lastflussproblem (3.8) werden ausschließlich Gleichheitsnebenbedingungen verwendet. Daher ist keine Veränderung der Menge der aktiven Indizes möglich.

Der Fehler in der Einhaltung der Lastflussgleichungen ist das Kriterium für die Bewertung der Lösung. Dieser entspricht gerade dem Fehler in den Nebenbedingungen des Lastflussoptimierungsproblems (3.8), der auch für die Zulässigkeitsselbstkorrektur verwendet wird. Da es mit diesem Algorithmus möglich ist, den Fehler in den Nebenbedingungen auf die selbe Genauigkeit zu verringern wie beim Lösen des Lastflussoptimierungsproblems (3.8), ist die gute Approximation der Optimierungsvariable infolgedessen erwartbar.

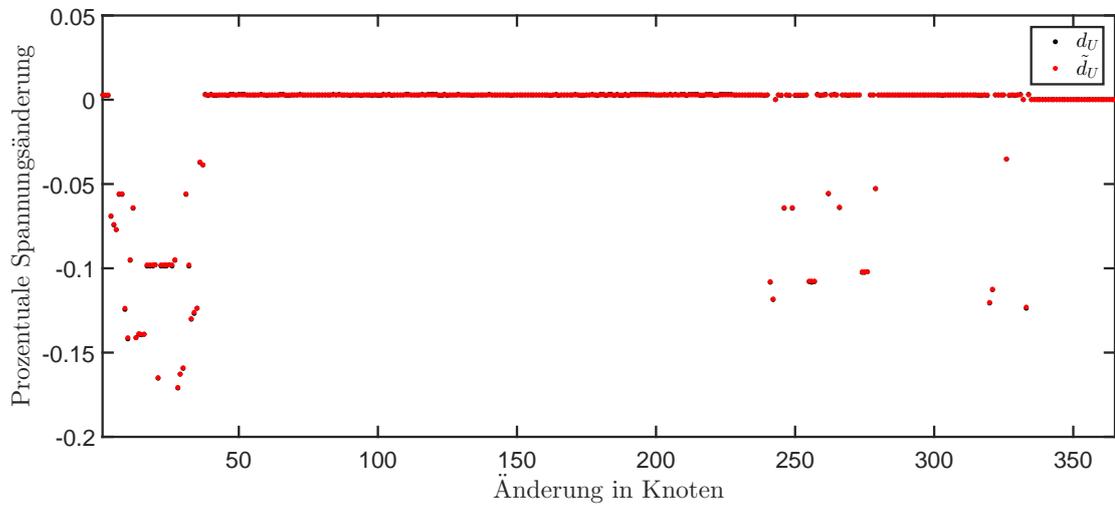


Abbildung 4.10: Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei  $\Delta P_{28} = -100$  kW

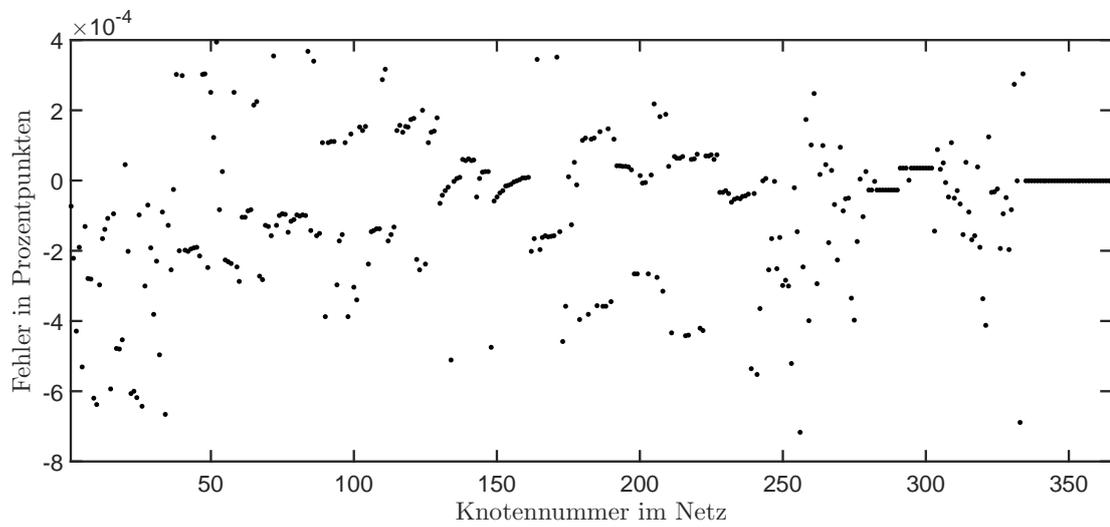


Abbildung 4.11: Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei  $\Delta P_{28} = -100$  kW

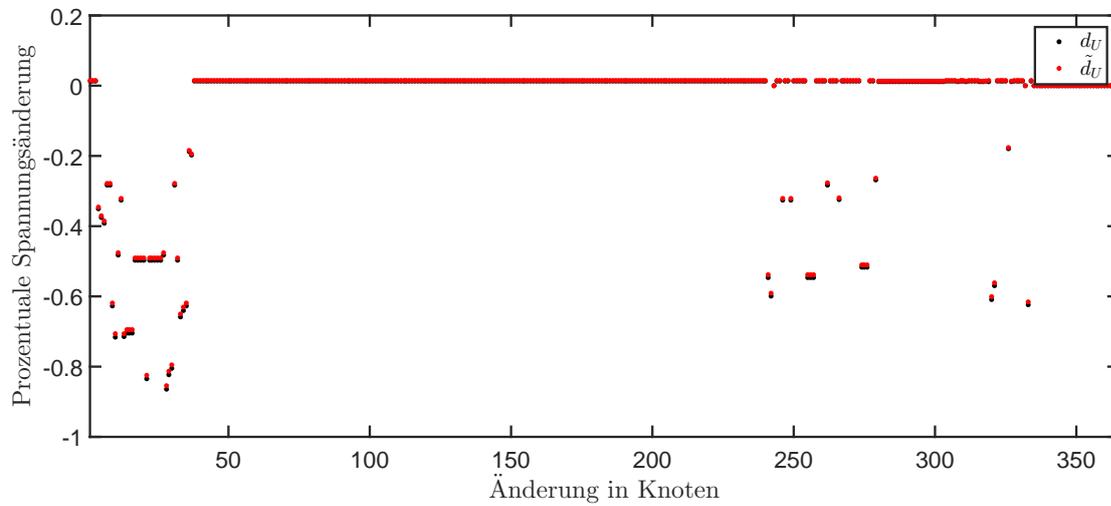


Abbildung 4.12: Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei  $\Delta P_{28} = -500$  kW

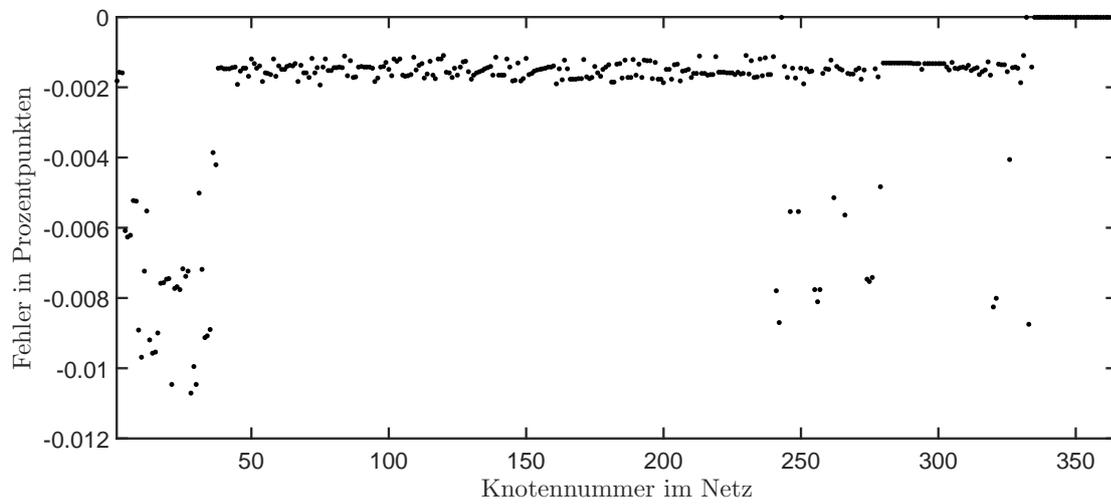


Abbildung 4.13: Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei  $\Delta P_{28} = -500$  kW

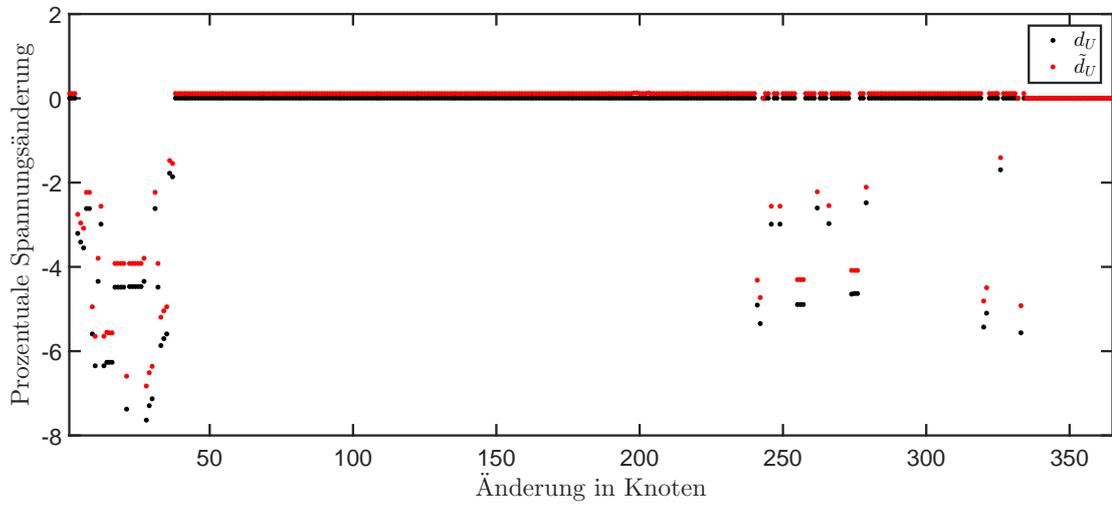


Abbildung 4.14: Vergleich zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei  $\Delta P_{28} = -4000$  kW

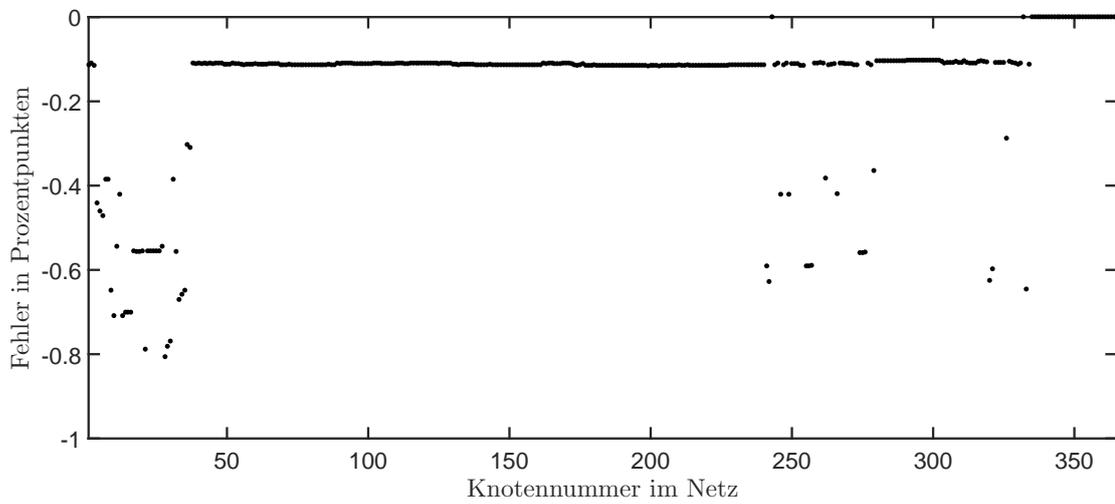


Abbildung 4.15: Fehler zwischen approximierter und tatsächlicher Spannungsänderung bei  $\Delta P_{28} = -4000$  kW

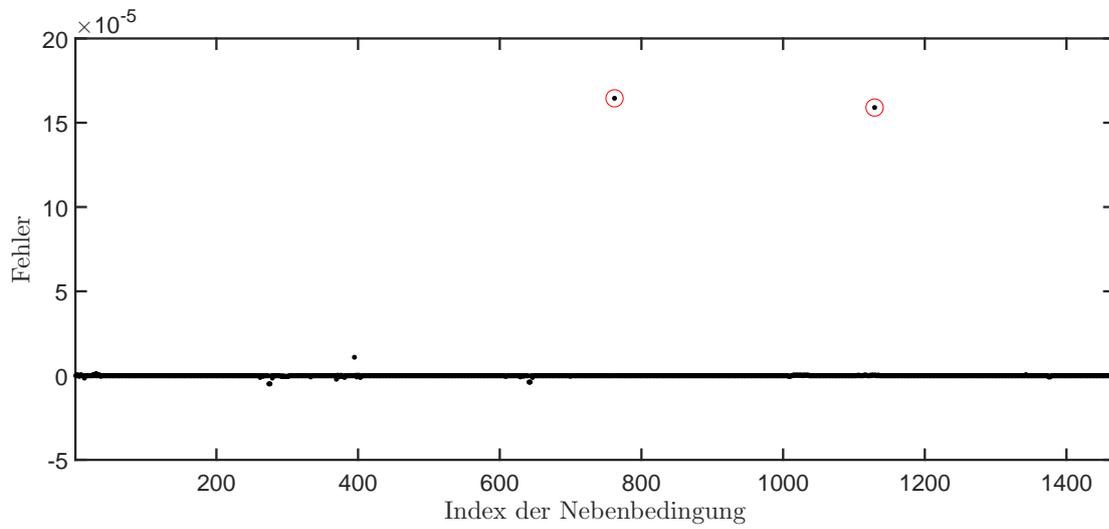


Abbildung 4.16: Fehler in den Nebenbedingungen der approximierten Lösung bei  $\Delta P_{28} = -100 \text{ kW}$

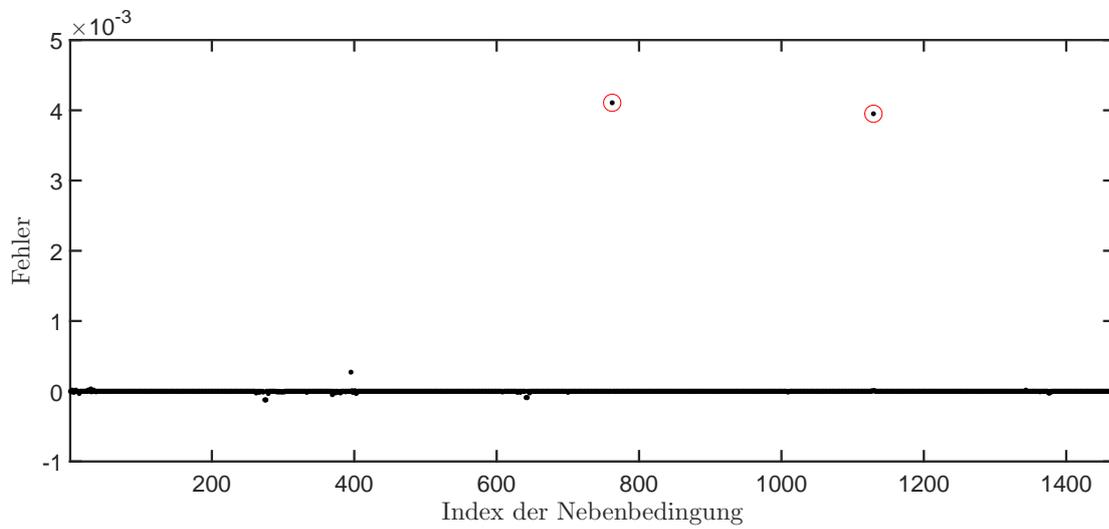


Abbildung 4.17: Fehler in den Nebenbedingungen der approximierten Lösung bei  $\Delta P_{28} = -500 \text{ kW}$

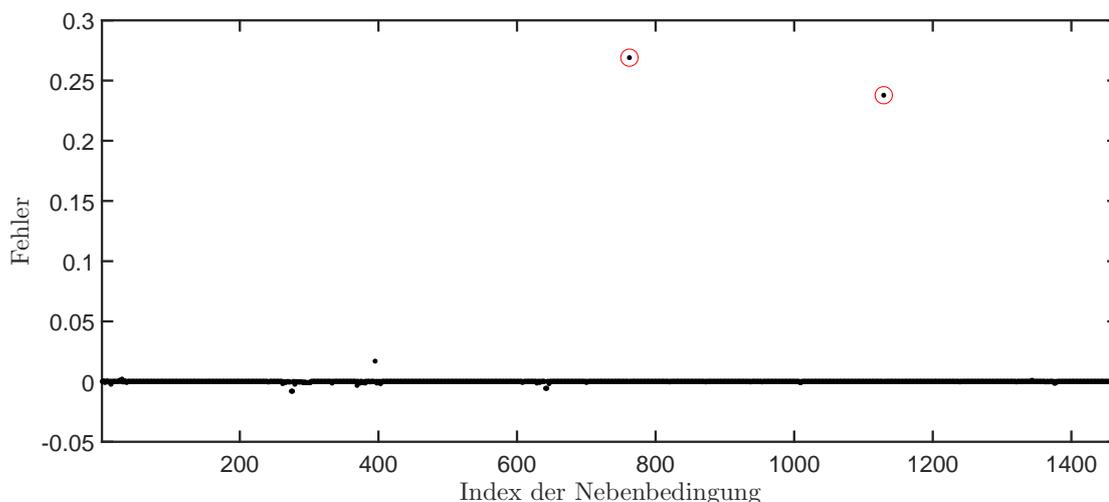


Abbildung 4.18: Fehler in den Nebenbedingungen der approximierten Lösung bei  $\Delta P_{28} = -4000$  kW

### 4.3 Berechnung des Schwachlastfalls mit den Sensitivitäten des Starklastfalls

Bei der Berechnung des Schwachlastfalls mit den Sensitivitäten des Starklastfalls, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, wird wie zuvor der Approximationsfehler ohne und mit Zulässigkeits selbstkorrektur betrachtet. Dabei ist neben der Notwendigkeit einer ausreichend guten Annäherung der Schwachlastspannungen insbesondere zu untersuchen, ob eine zeitliche Ersparnis gegenüber dem erneuten Lösen der Lastflussgleichungen erzielt werden kann. In Tabelle 4.3 ist der zugehörige Iterationsverlauf aufgeführt. Dazu ist nach jedem Iterationsschritt wie zuvor der Fehler in der Optimierungsvariable, im Betrag der Spannung und in den Nebenbedingungen in der Maximumsnorm dargestellt. Außerdem sind in Spalte 2 die Zeiten für die Berechnung einer Approximation nach Gleichung (2.39) aufgeführt. Die Ergebnisse zeigen als erstes, dass sich die Optimierungsvariable  $x^{LL}$  bis auf eine sehr hohe Genauigkeit mit einem Fehler im Bereich von  $10^{-9}$  annähern lässt, wenn die Verletzung der Nebenbedingung durch den Algorithmus auf eine ähnliche Genauigkeit verringert wird ( $\delta = 10^{-9}$ ).

Beim Betrachten der Zeiten für die Berechnung der einzelnen Iterationen ist zu erkennen, dass die Rechenzeit in den ersten beiden Iterationen deutlich höher ist, als in den anderen. Die Erklärung dafür liegt in der Zeit, die dafür benötigt wird, die Sensitivitäten selbst zu berechnen. Die Funktion zur Approximation der Sensitivitäten in WORHP Zen berechnet bei einem Aufruf nur die Sensitivitäten, die auch für die Approximation benötigt werden. Nach Bemerkung 2.3.1 wird für die Sensitivitätsableitung nach einem Parameter ein Aufwand von  $\mathcal{O}((N_x + N_g + N_h)^2)$  für das Vorwärts- und Rückwärtseinset-

zen des linearen Gleichungssystems benötigt. Beim ersten Aufruf sind knapp ein Drittel aller Nebenbedingungen gestört und beim zweiten Aufruf alle Nebenbedingungen. Bei  $4K$  Nebenbedingungen sind damit  $N_g = 4K$  lineare Gleichungssysteme zu lösen, sodass für die ersten beiden Iterationen ein Aufwand von insgesamt  $N_h \cdot \mathcal{O}((N_x + N_g + N_h)^2)$  benötigt wird. Dieser ist damit in derselben Größenordnung wie der Aufwand für die Faktorisierung der KKT-Matrix, die bei der Lösung der Lastflussgleichungen durchgeführt wird. Dieser Vergleich des Aufwandes ist, wie in der Bemerkung 2.3.1 bereits erwähnt, ohne Berücksichtigung von Vorfaktoren oder Anzahl der Nulleinträge in der Matrix nur eine sehr grobe Abschätzung. Die Sensitivitäten werden, nachdem sie einmal berechnet wurden, gespeichert und für alle weiteren Berechnungen verwendet, sodass die Rechenzeit danach deutlich geringer ist und konstant bleibt. Durch eine Verringerung der Genauigkeit ist also kaum eine zeitliche Ersparnis zu erreichen, da der Großteil der Zeit für die Berechnung der ersten beiden Iterationen benötigt wird.

r	Zeit [ms]	$\ (\tilde{x}^{LL})^{[r]} - x^{LL}\ _\infty$	$\ (\tilde{U}^{LL})^{[r]} - U^{LL}\ _\infty$	$\ h(\tilde{x})\ _\infty$
0	404	-20,9937	1,19517	1,47364
1	792	-3,49821	-0,180721	0,243387
2	8	1,13965	-0,12973	0,037449
3	8	-0,272851	0,0243091	0,0435709
4	8	0,143482	-0,00443715	0,0213699
5	8	0,0416122	-0,00263859	0,00525501
6	8	-0,0270778	0,00160853	0,00263908
7	8	-0,00407675	$8,16612e^{-05}$	0,000353671
8	8	0,00141656	-0,000168706	0,000243877
9	8	-0,000624575	$3,55249e^{-05}$	$6,45078e^{-05}$
10	8	0,000130634	$3,91932e^{-06}$	$1,85022e^{-05}$
11	8	$5,00064e^{-05}$	$-4,73404e^{-06}$	$4,9885e^{-06}$
12	8	$-3,03217e^{-05}$	$1,56076e^{-06}$	$3,26403e^{-06}$
13	8	$-5,16145e^{-06}$	$1,67814e^{-07}$	$4,88692e^{-07}$
14	8	$2,10178e^{-06}$	$-1,86796e^{-07}$	$2,17766e^{-07}$
15	8	$-8,44942e^{-07}$	$4,71584e^{-08}$	$1,00724e^{-07}$
16	8	$-1,59179e^{-07}$	$4,51723e^{-09}$	$4,73525e^{-08}$
17	8	$7,8051e^{-08}$	$-8,05721e^{-09}$	$1,06355e^{-08}$
18	8	$-3,61313e^{-08}$	$2,34702e^{-09}$	$8,45031e^{-09}$
19	8	$-6,72637e^{-09}$	$4,82e^{-10}$	$1,35835e^{-09}$
20	8	$3,34737e^{-09}$	$-3,92962e^{-10}$	$1,14285e^{-09}$
21	8	$-1,55772e^{-09}$	$8,19895e^{-11}$	$1,83909e^{-10}$

Tabelle 4.3: Iterationsverlauf der Zulässigkeitsselbstkorrektur bei der Berechnung des Schwachlastfalls mit den Sensitivitäten des Starklastfalls

Um die Zeit, die für die Berechnung der Sensitivitäten benötigt wird von der Zeit, die nur für die Berechnung der Approximation der Optimierungsvariable benötigt wird zu trennen, erfolgt die Berechnung aller Sensitivitäten nach den Störungen in den Nebenbedingungen  $\frac{dx^{SL}}{dq}(q_0)$  für die Darstellung in Tabelle 4.4 vorab. Sie zeigt eine Übersicht über die

Rechenzeiten für die Lastflussberechnung und die Approximation mit den Sensitivitäten. Die Zeiten der Lastflussberechnung für den Stark- und den Schwachlastfall beziehen sich auf das Lösen des speziellen Lastflussoptimierungsproblems (3.8) mit WORHP bei einer Schranke für die Nebenbedingungsverletzungen von  $\max(\|g_{\mathcal{A}}\|_{\infty}, \|h\|_{\infty}) \leq 10^{-6}$ . Für die Approximationen der Optimierungsvariable des Schwachlastfalls wird für Algorithmus 1 die gleiche Genauigkeit in der Verletzung der Nebenbedingungen, d.h.  $\delta = 10^{-6}$ , verwendet. Für den zeitlichen Vergleich ist die Berechnung der Sensitivitätsableitungen einmal in die Rechenzeit eingerechnet (mit Sensitivitätsberechnung) und einmal nicht, d.h. es ist die Zeit für die Approximation angegeben, wenn die Sensitivitäten schon vorab berechnet wurden (ohne Sensitivitätsberechnung). Die Zeit für die Approximation mit Sensitivitätsberechnung entspricht der Summe aus der Berechnung aller Sensitivitäten und der Zeit für die Approximationen ohne Sensitivitätsberechnung. Dass für die Berechnung der Sensitivitäten dabei schon fast so viel Zeit benötigt wird, wie für die gesamte Approximation, zeigt, dass die Berechnung des Schwachlastfalls mit den Sensitivitäten des Starklastfalls nur dann sinnvoll ist, wenn die Sensitivitäten bereits zuvor berechnet und beispielsweise für die Analyse des Starklastfalls verwendet wurden. Um eine ähnliche Genauigkeit in der Verletzung der Nebenbedingungen zu erreichen, wie durch ein erneutes Lösen der Lastflussgleichungen, wird bei der Approximation insgesamt sogar mehr Zeit benötigt. Falls die Sensitivitäten aber bereits berechnet und verwendet wurden, ist die Approximation extrem schnell und, wie die Fehler in der Optimierungsvariable und in den Nebenbedingungen nach mehr als 13 Iterationen in Tabelle 4.3 zeigen (in einer Größenordnung von  $10^{-6}$ ), auch sehr genau.

	Zeit [ms]
Lastflussberechnung Starklast	924
Lastflussberechnung Schwachlast	1329
Berechnung aller Sensitivitäten $\frac{dx^{SL}}{dq}(q_0)$	1234
Approximation Schwachlast aus Starklast (ohne Sensitivitätsberechnung)	118
Approximation Schwachlast aus Starklast (mit Sensitivitätsberechnung)	1352

Tabelle 4.4: Vergleich der Rechenzeiten bei der Berechnung des Schwachlastfalls

In heuristischen Algorithmen zur Zielnetzplanung ist eine hohe Genauigkeit bei der Berechnung der Spannungen der Lastflussgleichungen nicht immer notwendig, da sich die Bewertung der Netze aus verschiedenen Größen, wie vor allem der Länge des Netzes oder den davon abhängigen Kosten für den Bau, zusammensetzt. Das Überschreiten von Lastflussgrenzen geht dabei negativ in die Bewertung ein. Während der Durchführung des Algorithmus kann eine ungenaue Approximation der Spannungen in einigen Iterationen zu Beginn ausreichen. Da bereits für eine Iteration von Algorithmus 1 alle Sensitivitäten nach Störungen in den Nebenbedingungen berechnet werden müssen und damit fast genauso viel Zeit wie für ein erneutes Lösen der Lastflussgleichungen benötigt wird, ist dafür nur eine einfache Approximation ohne Anwendung von Algorithmus 1

sinnvoll. Diese Möglichkeit der Approximation ist bereits in dem erwähnten Algorithmus zur Zielnetzplanung der AG Optimierung und Optimale Steuerung eingebaut und kann nach Bedarf eingeschaltet werden. Dadurch kann die Zeit für die Lastflussberechnung des Schwach- und Starklastfalls auf Kosten der Genauigkeit um einen Faktor von ungefähr einem Drittel verringert werden. Diese ungenaue Approximation erfolgt dabei nur in Iterationen zu Beginn des Algorithmus. Teilweise wird die Lastflussberechnung in den ersten Iterationen gar nicht durchgeführt, da der Algorithmus bei einer Gesamtlaufzeit von über 24 Stunden zeitkritisch ist und die Lastflussberechnungen einen großen Anteil der Berechnung einnehmen. Eine ungenaue Approximation des in der Regel weniger kritischen Schwachlastfalls stellt daher sowohl zeitlich, als auch für die Bewertung der Netze, einen Kompromiss zwischen keiner und vollständiger Berechnung des Lastflusses dar. Durch eine Verwendung der ersten Approximation der Sensitivitäten des Starklastfalls für eine Startschätzung des Schwachlastfalls kann keinerlei zeitlicher Vorteil erzielt werden. Daher werden die Ergebnisse dazu nicht extra aufgeführt.

## 4.4 Möglichkeiten der Anwendung

Insgesamt zeigen alle bisherigen Betrachtungen, dass sich die Spannungsänderungen des Netzes durch die Sensitivitäten sinnvoll abbilden lassen. Der Vergleich der linearen Approximationen durch die Sensitivitäten mit erneuten Lastflussberechnungen zeigt, dass die Spannungsänderung sowohl bei kleinen, als auch bei großen Störungen durch die Sensitivitäten abgeschätzt werden kann. Auch die Struktur des Netzes wird durch die Größe der Sensitivitäten wiedergegeben, wie die Betrachtung einzelner Netzausschnitte und der Sensitivitätsmatrix insgesamt zeigt. Dass durch eine Zulässigkeitselbstkorrektur mit Algorithmus 1 in allen betrachteten Fällen die Optimierungsvariable nahezu exakt angenähert werden kann, bestätigt zusätzlich die Aussagekraft der Sensitivitäten.

Die Sensitivitätsmatrix liefert somit die notwendigen Informationen, um Knoten im Netz auszumachen, bei denen Leistungsschwankungen besonders starken Einfluss auf die Spannung im Netz haben oder deren Spannung sehr stark durch Leistungsschwankungen beeinflusst wird. Der Maximalwert der Sensitivitäten der  $k$ -ten Spalte der Matrix (3.9) gibt eine lineare Näherung an die maximale Spannungsänderung in  $[\frac{kV}{kW}]$  an, die in irgendeinem Knoten des Netzes durch eine Leistungsänderung in Knoten  $k$  hervorgerufen werden kann. In Abbildung 4.19 sind diese Maximalwerte  $\|\frac{dU^v}{dP_k}\|_\infty$  für jede Spalte der Matrix dargestellt. Dieser Wert ist in den meisten Fällen der Wert auf der Diagonale von Matrix (3.9), da sich eine Leistungsänderung in einem Knoten, wie bei der Analyse der Sensitivitätsmatrix bereits erwähnt, in der Regel am stärksten auf die Spannung in demselben Knoten auswirkt. Da die Abweichung von der Nominalspannung sich bei der Analyse von Netzen immer auf jeden Knoten einzeln bezieht, ist es für ein möglichst stabiles Netz am sichersten die maximale Spannungsänderung zu betrachten. Um ein Netz zu bauen, das möglichst wenig auf Leistungsänderungen reagiert, können die durch Sensitivitäten berechneten maximalen Spannungsänderungen beispielsweise in die Bewertung eines Netzes in Zielnetzplanungsalgorithmen eingehen.

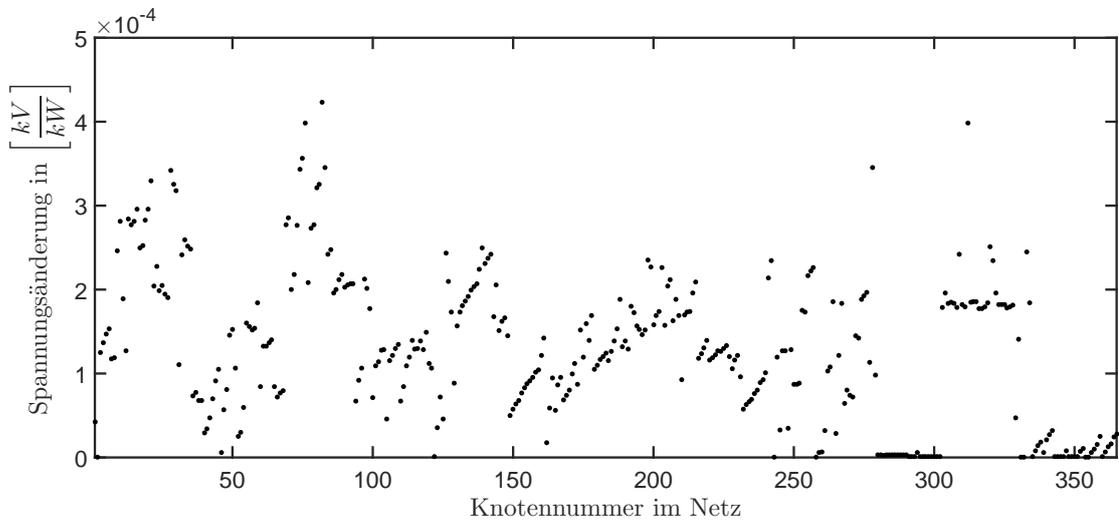


Abbildung 4.19: Maximale Spannungsänderung im Netz für Leistungsänderungen in jedem Knoten

Der Einfluss von Leistungsänderungen auf das Gesamtnetz lässt sich mit der 2-Norm der Spalten von Matrix (3.9) bewerten. Werden diese durch die Wurzel aus der Anzahl der Knoten geteilt, ergibt sich der quadratische Mittelwert der Sensitivitäten einer Spalte  $\|\frac{dU^v}{dP_k^c}\|_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{K}}$ . Jeder Punkt gibt also die Auswirkungen an, die eine Leistungsänderung in einem Knoten im quadratischen Mittel und in linearer Näherung auf das Netz hat. Diese Werte sind für jeden Knoten  $k$  in Abbildung 4.20 dargestellt. Hier ist allerdings zu beachten, dass die Untersuchungen am Anfang des Kapitels gezeigt haben, dass die Sensitivitäten in den Knoten, die an einer Leitung liegen, sehr viel höher sind, als im Rest des Netzes und die Auswirkungen auf viele Knoten des Netzes sehr Nahe bei 0 liegen. Außerdem ist eine starke Spannungsänderung in einem einzelnen Knoten deutlich schlechter für die Stabilität des Netzes als kleine Änderungen in allen Netzknoten. Durch den quadratischen Mittelwert wird im Gegensatz zur Maximumsnorm allerdings eine Auswirkung auf viele Knoten des Netzes berücksichtigt. Beim Betrachten von Abbildung 4.20 ist vor allem die Größe der Werte im Vergleich zueinander zu betrachten. Die mittleren quadratischen Werte der Sensitivitäten sind insgesamt in den Knoten 4 bis 37 am Größten. Eine Leistungsänderung in diesen Knoten wirkt sich somit im quadratischen Mittel am stärksten auf das gesamte Netz aus. Im Vergleich zu den Knoten 76 und 82, in denen die Maximalwerte der Sensitivitäten am höchsten sind, wirken sich Leistungsänderungen in einigen der Knoten mit Index zwischen 4 und 37 im Mittel stärker auf Spannungsänderungen im gesamten Netz aus. Dies stimmt mit den Beobachtungen, die am Anfang dieses Kapitels in Abschnitt 4.1 zu genau diesen Knoten gemacht wurden, überein.

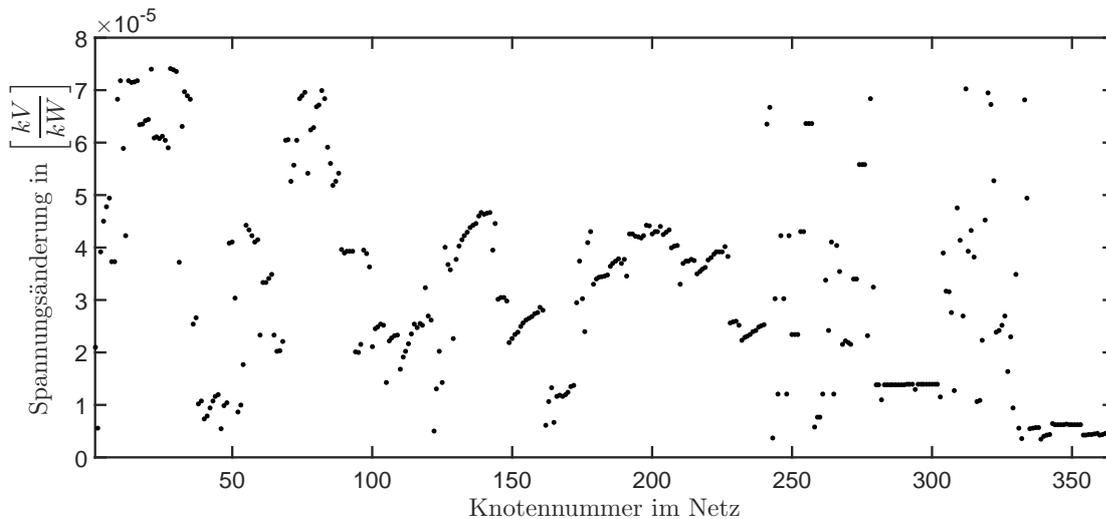


Abbildung 4.20: Mittlere quadratische Spannungsänderung im Netz für Leistungsänderungen in jedem Knoten

Die Betrachtung der Sensitivitäten in geeigneten Normen liefern Ansätze, um diese als Kriterium für die Spannungsstabilität in die Bewertung eines Netzes einfließen zu lassen. Die Bewertung von Netzen ist, wie bereits erwähnt, beispielsweise bei automatisierten Zielnetzplanungsalgorithmen von Bedeutung. Die Bewertung eines Netzes stellt dabei eine übergeordnete Zielfunktion dar, die unabhängig von der Zielfunktion des Lastflussoptimierungsproblems (3.5) ist. Wie eine Bewertung der Sensitivitäten im Detail zu realisieren ist, beispielsweise als Teil der übergeordneten Zielfunktion oder durch eine übergeordnete Mehrzieloptimierung, bietet Anlass zu weiteren Untersuchungen, würde aber den Rahmen dieser Arbeit überschreiten.

Eine weitere Möglichkeit zur Anwendung der Sensitivitätsanalyse bietet sich, wenn mögliche Anschlussknoten für zusätzliche Lasten oder Verbraucher bereits bekannt sind. Während die oben betrachteten Normen eine allgemeine Aussage darüber geben, welche Knoten des Netzes besonders sensitiv auf Leistungsänderungen reagieren, können hier zum Beispiel die maximalen Spannungsänderungen direkt miteinander verglichen werden. Außerdem können die Spannungsänderungen im gesamten Netz durch die Sensitivitäten wie in Abschnitt 4.2 approximiert und miteinander verglichen werden. Für einen Vergleich der Spannungen bei unterschiedlichen Leistungen ist immer auch ein erneutes Lösen der Lastflussgleichungen möglich. Stehen die Sensitivitäten allerdings schon zur Verfügung oder sind nur wenige Sensitivitätsableitungen zu berechnen, ist die Annäherungen mit Sensitivitäten deutlich schneller als eine Lastflussberechnung und kann innerhalb von zeitkritischen Algorithmen verwendet werden.

Im bereits mehrfach erwähnten Algorithmus zur Zielnetzplanung der AG Optimierung

und Optimale Steuerung werden Lastflussberechnungen für mehr als 10000 unterschiedliche Netze durchgeführt, sodass der zeitliche Aufwand bei einer Gesamtdauer von über 24 Stunden für zusätzliche Lastflussrechnungen stark ins Gewicht fällt. Eine zusätzliche Lastflussrechnung für jedes Netz kann eine Verdopplung der Zeit bedeuten. Daher ist auch der zeitliche Aufwand für die Berechnung der Sensitivitäten nicht vernachlässigbar. Insgesamt zeigen die Auswertungen jedoch, dass die Sensitivitäten sich prinzipiell für die Analyse der Spannungsstabilität eines Netzes eignen und sowohl kleine, als auch große Leistungsänderungen sinnvoll abbilden können. Sie liefern zusätzliche Informationen, die über die durch die Lastflussberechnung ermittelten stationären Werte der Spannungsabweichung in bestimmten Netzkonfigurationen hinaus gehen.

# Zusammenfassung und Ausblick

Aufgrund der fortlaufenden Entwicklungen in der elektrischen Energieversorgung wird der Umbau von elektrischen Übertragungsnetzen zunehmend notwendig, um die elektrischen Belastungsgrenzen der Netze nicht zu verletzen. Mit der Lastflussberechnung können die Spannungen in den Netzknoten für Extremfälle in Einspeisung und Verbrauch stationär berechnet werden. In dieser Arbeit wurde untersucht, inwiefern der Einfluss von Leistungsänderungen auf die Spannung des Netzes durch die parametrischen Sensitivitäten abgebildet werden kann. Die Leistung wurde dafür als Parameter des Lastflussoptimierungsproblems betrachtet. Die Grundlage für die Berechnung der Sensitivitäten waren die Herleitung der Lastflussgleichungen in Kapitel 1 und die Theorie parameterabhängiger nichtlinearer Optimierungsprobleme in Kapitel 2. Die Auswertung an einem einem Mittelspannungsnetz in Deutschland mit realen Daten zeigt, dass anhand der Sensitivitäten die Auswirkungen von Leistungsänderungen in Wirk- und Blindleistung auf die Spannung im gesamten Netz ermittelt werden können. Je näher Leistungsänderungen um eine Nominalleistung betrachtet werden, desto größer ist die Aussagekraft der Sensitivitäten, da diese lineare Näherungen an die optimale Lösung darstellen. Dennoch konnte gezeigt werden, dass diese auch bei großen Leistungsänderungen im Vergleich zur Nominalspannung noch Gültigkeit besitzen. Die Verwendung von realen Daten eines Mittelspannungsnetzes aus Deutschland lässt auf eine Übertragbarkeit auf elektrische Netze im Allgemeinen schließen, da die theoretisch belegten Grundlagen für Lastflussoptimierungsprobleme generell gültig sind. Vergleichbare Ergebnisse konnten auch an anderen, kleineren elektrischen Netzen erzielt werden, sind aber auf Grund der Ähnlichkeit zu den dargestellten Ergebnissen und des Umfangs dieser Arbeit nicht explizit aufgeführt.

Eine Anwendung der parametrischen Sensitivitätsanalyse liefert die automatisierte Zielnetzplanung, in der für eine sehr große Anzahl von Netzen Lastflussberechnungen durchgeführt werden, um diese unter anderem an Kriterien für die Spannungsstabilität zu bewerten. Die Sensitivitäten in die Bewertung der Netze einfließen zu lassen, um eine schnellere Konvergenz des Algorithmus zu einem stabilen Netz zu begünstigen oder stabilere Netze zu erhalten, ist eine Möglichkeit für die Anwendung, die Anlass zu weiteren Untersuchungen bietet. Wie in Kapitel 4 angeführt, ist die Approximation des Schwachlastfalls mit den Sensitivitäten des Starklastfalls bereits in einen bestehenden Algorithmus integriert. Ein Vorteil in der Rechenzeit ergibt sich dabei allerdings nur bei verringerter Genauigkeit, da der Rechenaufwand für die Berechnung der Sensitivitäten insgesamt nicht vernachlässigt werden kann. Die Berechnung der Sensitivität nach einem einzelnen Parameter erfolgt durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen eines linearen Gleichungssystems und ist daher vom Rechenaufwand her sehr effizient. Für die Berechnung

einer großen Anzahl von Sensitivitätsableitungen, wie es für die Bewertung des gesamten Netzes anhand der Sensitivitäten oder den Algorithmus der Zulässigkeits selbstkorrektur notwendig ist, wird der Rechenaufwand jedoch signifikant, da er für die Sensitivitäten von Störungen in allen Nebenbedingungen zeitlich ungefähr so hoch ist, wie für die Lösung eines Lastflussoptimierungsproblems. Der zeitliche Aspekt ist bei der Integration in einen Algorithmus zu beachten und kann zusammen mit den Auswirkungen von Bewertungen der Sensitivitäten auf die Konvergenz des Algorithmus als Ansatz weiter verfolgt werden.

Des Weiteren sind Vergleiche zwischen verschiedenen Anschlusspunkten von neuen Verbrauchern oder Erzeugern sowie in der Praxis zu evaluieren. Eine weitere Möglichkeit für anschließende Untersuchungen ist die Integration verschiedener Szenarien des Anschlusses von Leistungen innerhalb eines Algorithmus zur Netzplanung.

Die elektrischen Grenzen eines Netzes werden nicht nur durch die Spannungen in den Knoten festgelegt, sondern auch durch die Ströme in den Leitungen. Diese werden durch die Spannungsdifferenzen der anliegenden Knoten mit den vorliegenden Leitungsparametern ermittelt. Den Zusammenhang zwischen den Sensitivitäten der Knotenspannungen zu den Leitungsströmen ist daher ein naheliegender Ansatz für weitere Untersuchungen, der allerdings den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde.

Insgesamt wurde in dieser Arbeit die prinzipielle Anwendbarkeit der parametrischen Sensitivitätsanalyse für Lastflussberechnungen bzw. Lastflussoptimierungsprobleme und stellt damit einen Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen der aufgeführten Aspekte dar.

# Anhang

## Listing A.1: Verwendete Parameterdatei für WORHP

```
<WorhpData revision="1780">
<Params>

  <!-- ##### General ##### -->
  <!-- ..... Algorithm ..... -->
  <INT name="algorithm" >1</INT>
  <!-- ..... Tolerances ..... -->
  <DOUBLE name=" TolFeas " >1.0000000000000000e-06</DOUBLE>
  <DOUBLE name=" TolOpti " >1.0000000000000000e-06</DOUBLE>
  <DOUBLE name=" TolComp " >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>
  <DOUBLE name=" AcceptTolFeas " >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>
  <DOUBLE name=" AcceptTolOpti " >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>
  <!-- ..... Special Termination ..... -->
  <BOOL name=" KeepAcceptableSol " >True</BOOL>
  <BOOL name=" LowPassFilter " >True</BOOL>
  <BOOL name=" TooBig " >True</BOOL>
  <INT name=" MaxCalls " >2147483647</INT>
  <INT name=" MaxIter " >10000</INT>
  <DOUBLE name=" Timeout " >1.8000000000000000e+03</DOUBLE>
  <DOUBLE name=" InftyUnbounded " >1.0000000000000000e+20</DOUBLE>
  <DOUBLE name=" LowPassAlphaF " >9.5000000000000000e-01</DOUBLE>
  <DOUBLE name=" LowPassAlphaG " >9.5000000000000000e-01</DOUBLE>
  <DOUBLE name=" TooBigCV " >1.0000000000000000e+25</DOUBLE>
  <DOUBLE name=" TooBigKKT " >1.0000000000000000e+30</DOUBLE>
  <!-- ..... Crossover ..... -->
  <INT name=" Crossover " >0</INT>
  <INT name=" CrossoverIter " >-1</INT>
  <DOUBLE name=" CrossoverTol " >1.0000000000000000e+01</DOUBLE>
  <!-- ..... Output ..... -->
  <BOOL name=" ShowMonitor " >False</BOOL>
  <BOOL name=" GiveNewEntriesX " >True</BOOL>
  <INT name=" LogLevel " >0</INT>
  <INT name=" LogResult " >0</INT>
  <INT name=" NLPprint " >2</INT>

  <!-- ##### Derivatives ##### -->
  <!-- ..... User Derivatives ..... -->
  <BOOL name=" UserDF " >False</BOOL>
  <BOOL name=" UserDG " >False</BOOL>
  <BOOL name=" UserHM " >False</BOOL>
  <BOOL name=" FGtogether " >False</BOOL>
  <INT name=" UserHMstructure " >2</INT>
  <!-- ..... Finite Differences ..... -->
```

```

<BOOL name="FidifHM" >True</BOOL>
<BOOL name="FidifGroups" >True</BOOL>
<BOOL name="ScaledFD" >True</BOOL>
<BOOL name="CheckGroups" >False</BOOL>
<BOOL name="FirstDifCentral" >True</BOOL>
<BOOL name="SecondDifCentral" >True</BOOL>
<INT name="GroupMethod" >1</INT>
<INT name="MaxGPart" >1</INT>
<INT name="PairMethod" >11</INT>
<DOUBLE name="FidifEps" >1.0000000000000000e-05</DOUBLE>
<!-- ..... Derivative Check ..... -->
<BOOL name="CheckStructureDF" >False</BOOL>
<BOOL name="CheckStructureDG" >False</BOOL>
<BOOL name="CheckStructureHM" >False</BOOL>
<BOOL name="CheckValuesDF" >False</BOOL>
<BOOL name="CheckValuesDG" >False</BOOL>
<BOOL name="CheckValuesHM" >False</BOOL>
<INT name="CheckDerivIter" >0</INT>
<DOUBLE name="CheckDerivTol" >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>
<!-- ..... Quasi-Newton ..... -->
<INT name="BFGSmethod" >2</INT>
<INT name="BFGSmaxblockSize" >3</INT>
<INT name="BFGSminblockSize" >1</INT>
<INT name="BFGSrestart" >44</INT>
<DOUBLE name="CurvBCond" >2.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<DOUBLE name="CurvBFac" >3.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name="CurvCond" >2.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<DOUBLE name="CurvFac" >3.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<!-- ..... Switch Mode ..... -->
<INT name="SwitchMode" >0</INT>
<INT name="SwitchModeMaxMinor" >8</INT>
<INT name="SwitchModeMaxIter" >0</INT>
<INT name="SwitchModeTermination" >0</INT>
<INT name="SwitchModeTolerances" >0</INT>
<DOUBLE name="SwitchModeIpComTol" >4.0000000000000000e-05</DOUBLE>
<DOUBLE name="SwitchModeIpResTol" >4.0000000000000000e-06</DOUBLE>
<DOUBLE name="SwitchModeLsTol" >1.0000000000000000e-07</DOUBLE>
<DOUBLE name="SwitchModeTermTol" >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>

<!-- ##### SQP Algorithm ##### -->
<!-- ..... Termination ..... -->
<BOOL name="FJandND" >True</BOOL>
<BOOL name="sKKTOnlyAcceptable" >False</BOOL>
<BOOL name="ScaledKKT" >True</BOOL>
<DOUBLE name="BoundTolFac" >1.0000000000000000e+03</DOUBLE>
<DOUBLE name="CheckFJ" >1.0000000000000000e+12</DOUBLE>
<DOUBLE name="LowPassAlphaMerit" >1.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<!-- ..... Hessian Regularisation ..... -->
<BOOL name="AutoQPRecovery" >True</BOOL>
<DOUBLE name="BettsFactor" >2.1000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name="BettsPoint" >1.0000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name="IncBettsTau" >2.0000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name="IncBettsTauMore" >3.0000000000000000e+00</DOUBLE>

```

```

<DOUBLE name=" StartBettsTau " >9.2000000000000000e-04</DOUBLE>
<!-- ..... Line Search ..... -->
<BOOL name=" LinMult " >False</BOOL>
<INT name=" NLPmethod " >3</INT>
<DOUBLE name=" ArmijoBeta " >8.9500000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" ArmijoBetaAres " >8.9500000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" ArmijoMaxAlpha " >9.9999999999990000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" ArmijoMinAlpha " >5.0000000000000000e-07</DOUBLE>
<DOUBLE name=" ArmijoMinAlphaRec " >1.0000000000000000e-06</DOUBLE>
<DOUBLE name=" ArmijoSigma " >5.0000000000000000e-03</DOUBLE>
<!-- ..... Filter ..... -->
<BOOL name=" AlphaMinConst " >False</BOOL>
<BOOL name=" FilterBisecAlpha " >False</BOOL>
<BOOL name=" FilterIntersecAlpha " >True</BOOL>
<BOOL name=" IgnoreFilterCrit " >True</BOOL>
<BOOL name=" ReinitFilter " >True</BOOL>
<BOOL name=" MaxNorm " >True</BOOL>
<BOOL name=" FilterRestFeas " >True</BOOL>
<BOOL name=" RestUntilFeas " >True</BOOL>
<INT name=" MaxLScouter " >13</INT>
<INT name=" RegStrategy " >3</INT>
<DOUBLE name=" FilterGammaCV " >5.0000000000000000e-04</DOUBLE>
<DOUBLE name=" FilterGammaF " >5.0000000000000000e-03</DOUBLE>
<DOUBLE name=" GammaAlpha " >1.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<DOUBLE name=" MinBettsTau " >6.0000000000000000e-16</DOUBLE>
<DOUBLE name=" ReduceBettsTau " >5.5000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" SwitchingDelta " >1.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<DOUBLE name=" SwitchingSF " >1.1000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name=" SwitchingSCV " >1.1000000000000000e+00</DOUBLE>
<!-- ..... Merit Function ..... -->
<BOOL name=" TakeQPSol " >False</BOOL>
<INT name=" MeritFunction " >4</INT>
<INT name=" PenUpdEpsKSequence " >2</INT>
<DOUBLE name=" PenUpdEpsBar " >9.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" PenUpdEpsKFac " >2.0000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name=" PenUpdMaxDeltaK " >1.1000000000000000e+01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" PenUpdMaxFac " >1.0000000000000000e+08</DOUBLE>
<DOUBLE name=" PenUpdRBar " >2.0000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name=" MeritGradTol " >2.2204460492503131e-16</DOUBLE>
<!-- ..... Feasibility Refinement ..... -->
<BOOL name=" RefineOnlyOnAlpha " >False</BOOL>
<BOOL name=" RefineFeasMerit " >False</BOOL>
<BOOL name=" SteffensenOnRefine " >True</BOOL>
<BOOL name=" UpdateMu " >False</BOOL>
<INT name=" RefineFeasMaxIter " >500</INT>
<INT name=" RefineFeasibility " >0</INT>
<INT name=" RefineFeasTermination " >0</INT>
<DOUBLE name=" RefineContrLimitc " >8.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" RefineContrLimitq " >1.0000000000000000e-03</DOUBLE>
<DOUBLE name=" RefineStartTol " >1.0000000000000000e-06</DOUBLE>
<DOUBLE name=" RefineMaxRelax " >9.5000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" RefineMaxHMReg " >1.0000000000000000e+03</DOUBLE>
<!-- ..... Post QP Sensitivity ..... -->

```

```

<INT name=" PostQPSensRegVal " >0</INT>
<BOOL name=" PostQPSensRelaxPen " >False</BOOL>
<INT name=" PostQPSensitivity " >0</INT>
<DOUBLE name=" PostQPSensRelaxFrac " >7.500000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" PostQPSensRegValFrac " >7.500000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" PostQPSensRegValObjDev " >1.000000000000000e-01</DOUBLE>
<!-- ..... Constraint Relaxation ..... -->
<BOOL name=" RelaxCon " >True</BOOL>
<BOOL name=" AdaptiveConstrRelax " >False</BOOL>
<BOOL name=" MoreRelax " >False</BOOL>
<BOOL name=" RelaxPenOnlyOne " >False</BOOL>
<DOUBLE name=" RelaxMaxDelta " >9.200000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" RelaxMaxPen " >1.000000000000000e+07</DOUBLE>
<DOUBLE name=" RelaxRho " >4.800000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name=" RelaxStart " >1.000000000000000e+00</DOUBLE>
<!-- ..... Scaling ..... -->
<BOOL name=" ScaleConIter " >True</BOOL>
<BOOL name=" ScaledObj " >True</BOOL>
<BOOL name=" ScaledQP " >True</BOOL>
<DOUBLE name=" ScaleFacObj " >1.000000000000000e+01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" ScaleFacQP " >1.000000000000000e+01</DOUBLE>
<!-- ..... Multiplier Estimation ..... -->
<BOOL name=" InitialLMest " >True</BOOL>
<DOUBLE name=" LMestQPipComTol " >1.000000000000000e-03</DOUBLE>
<DOUBLE name=" LMestQPipResTol " >1.000000000000000e-03</DOUBLE>
<!-- ..... Special Feasibility Modes ..... -->
<BOOL name=" FeasibleDual " >False</BOOL>
<BOOL name=" FeasibleInit " >False</BOOL>
<BOOL name=" FeasibleOnly " >False</BOOL>
<BOOL name=" FocusOnFeas " >True</BOOL>
<DOUBLE name=" FeasibleInitTol " >1.000000000000000e-03</DOUBLE>
<DOUBLE name=" FocusOnFeasFactor " >1.010000000000000e+00</DOUBLE>
<!-- ..... Recovery Strategies ..... -->
<INT name=" MaxForce " >4</INT>
<VEC name=" Ares " kind=" int " dim=" 7 ">
  <Elem i=" 0 ">42</Elem>
  <Elem i=" 1 ">41</Elem>
  <Elem i=" 2 ">42</Elem>
  <Elem i=" 3 ">43</Elem>
  <Elem i=" 4 ">44</Elem>
  <Elem i=" 5 ">41</Elem>
  <Elem i=" 6 ">50</Elem>
</VEC>

<!-- ##### Interior-Point Algorithm ##### -->
<!-- ..... NLP ..... -->
<BOOL name=" IP_NlpRelaxBounds " >False</BOOL>
<BOOL name=" IP_NlpRelaxBoundsIter " >True</BOOL>
<BOOL name=" IP_NlpStressBounds " >False</BOOL>
<!-- ..... Barrier Parameter ..... -->
<INT name=" IP_BarrierUpdate " >1</INT>
<INT name=" IP_BarrierIterFast " >3</INT>
<DOUBLE name=" IP_BarrierInit " >1.000000000000000e-01</DOUBLE>

```

```

<DOUBLE name=" IP_BarrierTol " >1.0000000000000000e+01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_BarrierLinDecr " >2.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_BarrierSupDecr " >1.5000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_BarrierLinDecrFast " >1.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_BarrierSupDecrFast " >1.8000000000000000e+00</DOUBLE>
<!-- ..... Penalty Parameter ..... -->
<INT name=" IP_PenaltyType " >3</INT>
<INT name=" IP_PenaltyPosition " >3</INT>
<DOUBLE name=" IP_PenaltySwitch " >1.0000000000000000e+05</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_PenaltyInit " >1.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_PenaltyTol " >1.0000000000000000e+01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_PenaltyTolDual " >9.9900000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_PenaltyLinIncr " >2.0000000000000000e+01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_PenaltyLinDecr " >2.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_PenaltyMin " >1.0000000000000000e-12</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_PenaltyMax " >1.0000000000000000e+12</DOUBLE>
<!-- ..... Initialization ..... -->
<INT name=" IP_InitMethodDual " >3</INT>
<INT name=" IP_InitMethodDualBox " >2</INT>
<DOUBLE name=" IP_InitDualBox " >1.0000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_InitBoundDistAbs " >1.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_InitBoundDistRel " >1.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_InitBoundDistSAbs " >1.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_InitBoundDistSRel " >1.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<!-- ..... Regularization ..... -->
<BOOL name=" IP_RegCheckInertia " >True</BOOL>
<BOOL name=" IP_RegFailUseIdentity " >False</BOOL>
<DOUBLE name=" IP_RegMinDescent " >1.0000000000000000e-12</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_RegHessStart " >1.0000000000000000e-04</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_RegHessOldFrac " >3.3333333333333333e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_RegHessIncrFast " >1.0000000000000000e+02</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_RegHessIncrStd " >8.0000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_RegHessMax " >1.0000000000000000e+20</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_RegJac " >1.0000000000000000e-08</DOUBLE>
<!-- ..... Linear Equation System ..... -->
<BOOL name=" IP_LeqIncQuality " >False</BOOL>
<BOOL name=" IP_LeqReduce " >False</BOOL>
<INT name=" IP_LeqItRefMinIter " >0</INT>
<INT name=" IP_LeqItRefMaxIter " >10</INT>
<DOUBLE name=" IP_LeqItRefTol " >1.0000000000000000e-10</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_LeqItRefImprFac " >9.9999999990000000e-01</DOUBLE>
<!-- ..... Line Search ..... -->
<INT name=" IP_LineMethod " >4</INT>
<INT name=" IP_LineMeritNonmon " >3</INT>
<INT name=" IP_LineFilterNonmon " >1</INT>
<INT name=" IP_LineFilterEnvelope " >2</INT>
<DOUBLE name=" IP_LineFilterGammaObj " >1.0000000000000000e-05</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_LineFilterGammaFeas " >1.0000000000000000e-05</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_LineArmijoBeta " >5.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_LineArmijoEta " >1.0000000000000000e-08</DOUBLE>
<BOOL name=" IP_LineInterp " >True</BOOL>
<DOUBLE name=" IP_LineInterpMin " >9.5000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_LineInterpMax " >1.0000000000000000e-02</DOUBLE>

```

```

<BOOL name=" IP_LineSlackReset " >True</BOOL>
<DOUBLE name=" IP_LineFracToBound " >9.900000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_LineTrustDual " >1.000000000000000e+10</DOUBLE>
<!-- ..... Termination ..... -->
<BOOL name=" IP_CheckInfeas " >True</BOOL>
<BOOL name=" IP_CheckFritzJohn " >True</BOOL>
<INT name=" IP_CheckNanInf " >2</INT>
<DOUBLE name=" IP_CheckMaxPrimal " >1.000000000000000e+20</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_CheckMaxDual " >1.000000000000000e+20</DOUBLE>
<BOOL name=" IP_CheckLowPassBarr " >True</BOOL>
<BOOL name=" IP_CheckLowPassPen " >True</BOOL>
<DOUBLE name=" IP_CheckLowPassTol " >1.000000000000000e-09</DOUBLE>
<BOOL name=" IP_CheckOrigCont " >True</BOOL>
<INT name=" IP_CheckOrigContMaxIter " >50</INT>
<!-- ..... Scaling ..... -->
<BOOL name=" IP_ScaleF " >True</BOOL>
<BOOL name=" IP_ScaleG " >True</BOOL>
<DOUBLE name=" IP_ScaleMaxGrad " >1.000000000000000e+02</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IP_ScaleMin " >1.000000000000000e-06</DOUBLE>

<!-- ##### Sensitivity Analysis ##### -->
<BOOL name=" UseZen " >True</BOOL>
<BOOL name=" UserZenDGp " >False</BOOL>
<BOOL name=" UserZenDLxp " >False</BOOL>
<BOOL name=" UserZenDLp " >False</BOOL>
<BOOL name=" UserZenDLpp " >False</BOOL>
<BOOL name=" ZenCheckMaxPert " >False</BOOL>
<BOOL name=" ZenRenewLU " >False</BOOL>
<INT name=" ZenStore " >3</INT>

<!-- ##### Linear Equation Solver ##### -->
<!-- ..... MA97 ..... -->
<BOOL name=" MA97blas3 " >False</BOOL>
<BOOL name=" MA97mf " >False</BOOL>
<INT name=" MA97ordering " >5</INT>
<INT name=" MA97scaling " >0</INT>
<INT name=" MA97print " >-1</INT>
<INT name=" MA97nemin " >8</INT>
<INT name=" MA97factorMin " >2000000</INT>
<DOUBLE name=" MA97small " >1.000000000000000e-20</DOUBLE>
<DOUBLE name=" MA97u " >1.000000000000000e-10</DOUBLE>
<DOUBLE name=" MA97umax " >1.000000000000000e-04</DOUBLE>

<!-- ##### Other ##### -->
<!-- ..... Machine Numbers ..... -->
<DOUBLE name=" Infty " >1.000000000000000e+20</DOUBLE>
<!-- ..... Workspace ..... -->
<DOUBLE name=" IncreaseIWS " >1.000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name=" IncreaseRWS " >1.000000000000000e+00</DOUBLE>

<!-- ##### QPSOL Parameters ##### -->
<!-- ..... QP Tolerances ..... -->
<DOUBLE name=" qp.ipComTol " >2.000000000000000e-07</DOUBLE>

```

```

<DOUBLE name="qp.ipResTol" >4.0000000000000000e-08</DOUBLE>
<DOUBLE name="qp.lsTol" >1.0000000000000000e-09</DOUBLE>
<BOOL name="qp.strict" >True</BOOL>
<!-- ..... Special Termination ..... -->
<INT name="qp.maxIter" >500</INT>
<!-- ..... Dual Regularisation ..... -->
<BOOL name="qp.ipTryRelax" >True</BOOL>
<DOUBLE name="qp.ipRelaxDiv" >2.0000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name="qp.ipRelaxMax" >1.0000000000000000e-12</DOUBLE>
<DOUBLE name="qp.ipRelaxMin" >9.1000000000000000e-10</DOUBLE>
<DOUBLE name="qp.ipRelaxMult" >1.0000000000000000e+01</DOUBLE>
<!-- ..... Interior Point Configuration ..... -->
<DOUBLE name="qp.ipBarrier" >8.9000000000000000e+00</DOUBLE>
<DOUBLE name="qp.ipFracBound" >8.8000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name="qp.ipMinAlpha" >1.0000000000000000e-11</DOUBLE>
<!-- ..... Deprecated Nonsmooth Newton ..... -->
<BOOL name="qp.nsnGradStep" >True</BOOL>
<INT name="qp.nsnLsMethod" >4</INT>
<DOUBLE name="qp.nsnBeta" >9.0000000000000000e-01</DOUBLE>
<DOUBLE name="qp.nsnKKT" >1.0000000000000000e-06</DOUBLE>
<DOUBLE name="qp.nsnMinAlpha" >1.0000000000000000e-11</DOUBLE>
<DOUBLE name="qp.nsnSigma" >1.0000000000000000e-02</DOUBLE>
<!-- ..... Linear Equation Solver ..... -->
<BOOL name="qp.lsScale" >True</BOOL>
<BOOL name="qp.lsTrySimple" >False</BOOL>
<INT name="qp.lsItMaxIter" >1000</INT>
<INT name="qp.lsItMethod" >0</INT>
<INT name="qp.lsItPrecondMethod" >0</INT>
<INT name="qp.lsRefineMaxIter" >10</INT>
<INT name="qp.ipLsMethod" >1</INT>
<!-- ..... General QPSOL ..... -->
<BOOL name="qp.scaleIntern" >False</BOOL>
<INT name="qp.method" >1</INT>
<!-- ..... Output Configuration ..... -->
<INT name="qp.printLevel" >0</INT>
</Params>
</WorhpData>

```

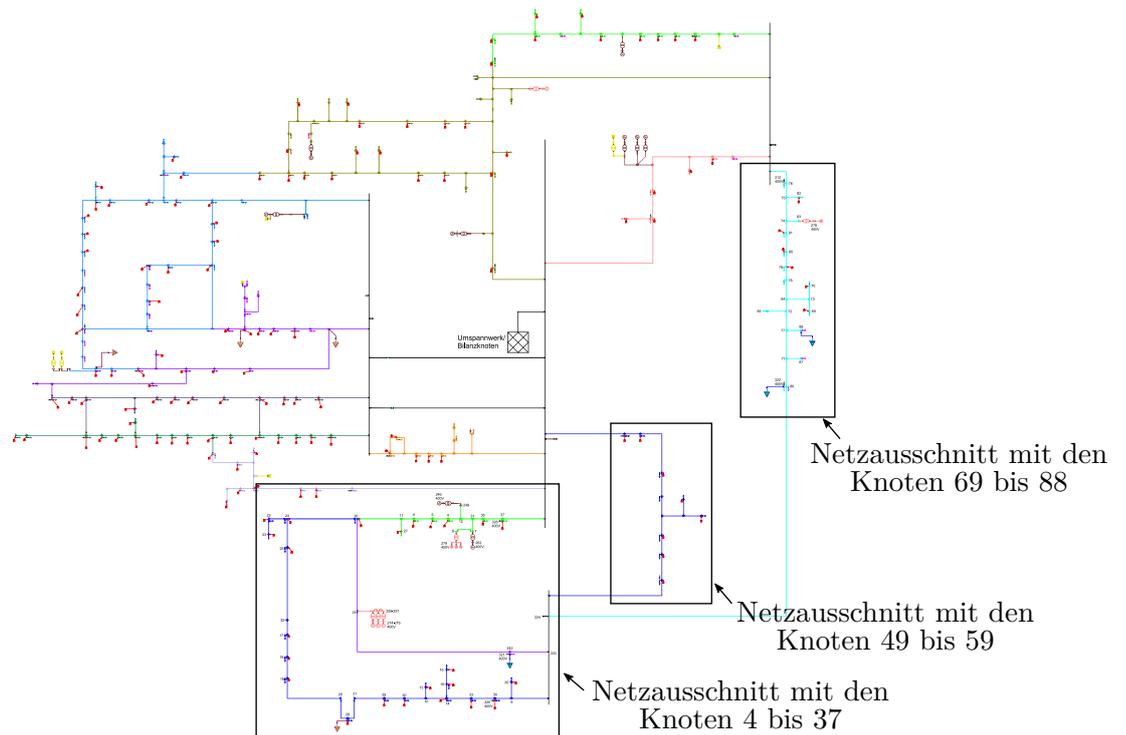


Abbildung A.1: Ersatzschaltplan des untersuchten 20 kV-Mittelspannungsnetzes (modifiziert nach [34])

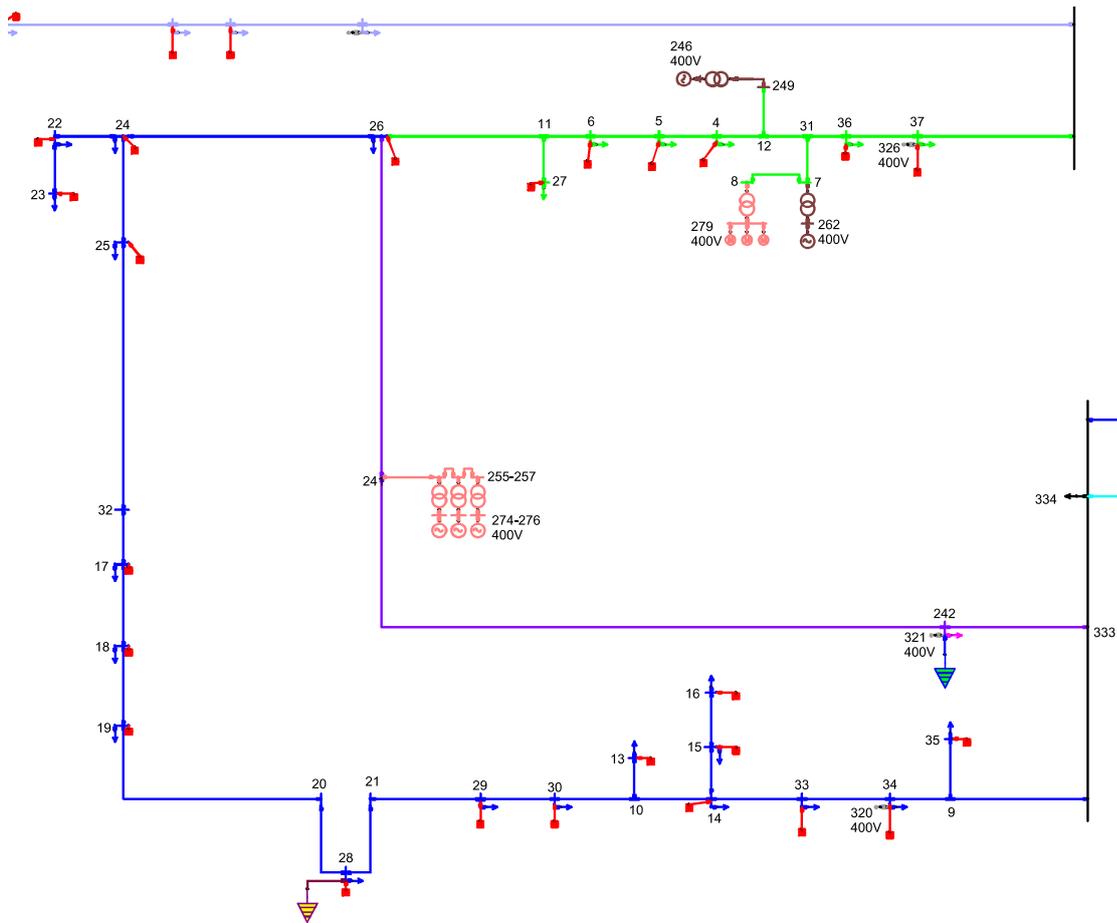


Abbildung A.2: Netzausschnitt mit den Knoten 4 bis 37 (modifiziert nach [34])

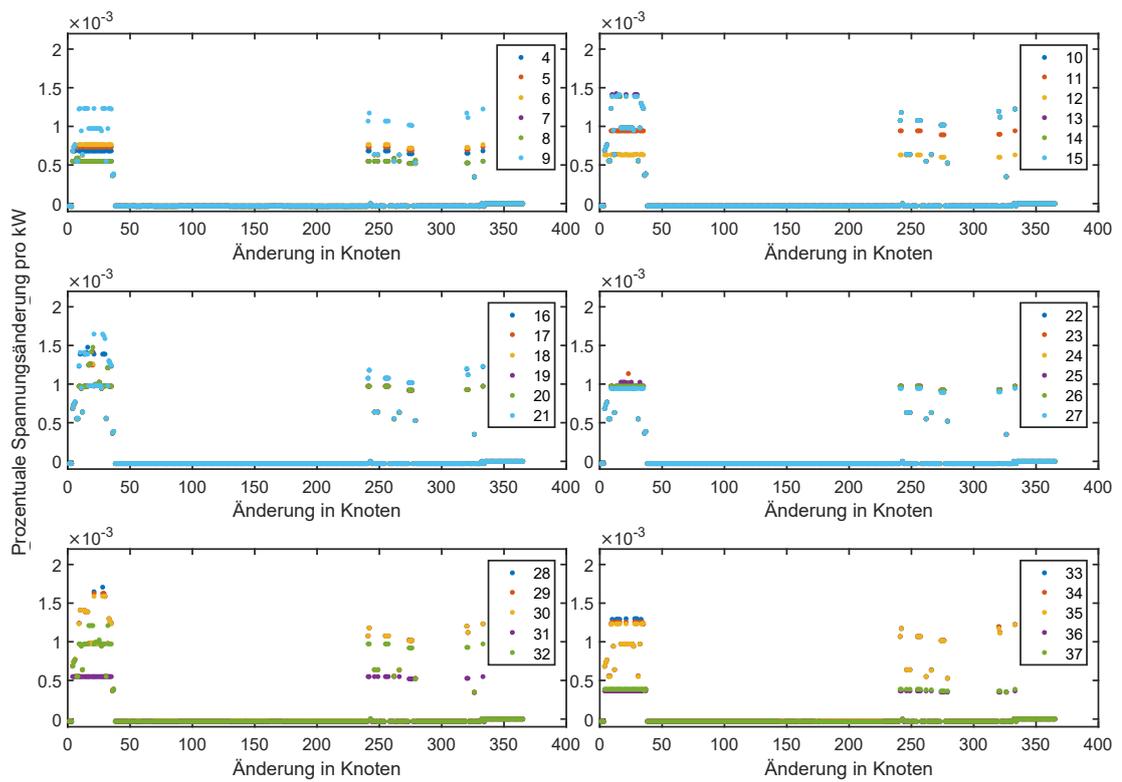


Abbildung A.3: Grafische Darstellung der Spalten 4 bis 37 der Sensitivitätsmatrix (3.9)

# Literaturverzeichnis

- [1] Büchner, Jens et al. (2014): Moderne Verteilernetze für Deutschland (Verteilernetzstudie). Abschlussbericht. Studie im Auftrag des Bundesministeriums für Wirtschaft und Energie (BMWi): Bonn
- [2] Deutsche Energie-Agentur (dena) (Hrsg.) (2012): dena-Verteilnetzstudie. Ausbau- und Innovationsbedarf der Stromverteilernetze in Deutschland bis 2030. Endbericht. Deutsche Energie-Agentur GmbH: Berlin
- [3] Eberl, Thomas und Wiest, Pascal (2014): Integrale Modellierung von Verteilnetzen und verteilter Erzeugung: Universität Stuttgart
- [4] Hagmann, Gert (2011): Grundlagen der Elektrotechnik. Das bewährte Lehrbuch für Studierende der Elektrotechnik und anderer technischer Studiengänge ab 1. Semester. Aula-Verlag: Wiebelsheim
- [5] Weißgerber, Wilfried (2013): Elektrotechnik für Ingenieure 2. Wechselstromtechnik, Ortskurven, Transformator, Mehrphasensysteme. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. Vieweg+Teubner Verlag: Wiesbaden
- [6] Vogg, Wolfgang (2008). Elektrizität und Magnetismus in Theorie und Praxis. Books on Demand: Norderstedt
- [7] Oeding, Dietrich und Oswald, Bernd R. (2011): Elektrische Kraftwerke und Netze. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg
- [8] Crastan, Valentin (2015): Elektrische Energieversorgung 1. Netzelemente, Modellierung, stationäres Verhalten, Bemessung, Schalt- und Schutztechnik. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg
- [9] BMWI (2012): Das deutsche Stromnetz. Grafik. Bundesministerium für Wirtschaft und Energie: Berlin. Verfügbar unter: <https://www.bmwi.de/Redaktion/DE/Infografiken/Energie/abbildung-das-deutsche-stromnetz.html>. Stand: 1.11.17
- [10] Söder, Lennart und Ghandhari, Mehrdad (2015): Static Analysis of Power Systems. Electric Power Systems Royal Institute of Technology: Stockholm
- [11] Lipphardt, Götz (2006): Elektrische Anlagen und Netze. Vorlesung. Fakultät für Elektrotechnik: Hochschule Mannheim

- [12] Milano, Federico (2010): Power System Modelling and Scripting. Springer-Verlag: London
- [13] DIN EN 50160: 2011-02, Elektrizitätsversorgung. Merkmale der Spannung in öffentlichen Elektrizitätsversorgungsnetzen.
- [14] Echim, Mitja (2014): Modellbasierte optimale Mehrgrößenregelung eines aufgeladenen Dieselmotors mittels Methoden der nichtlinearen Optimierung. Doktorarbeit: Universität Bremen
- [15] Nicolayzik, T. Büskens, C. und Wassel, D. (2011): Nonlinear Optimization in Space Applications with WORHP. Proceedings of the 62nd International Astronautical Congress (IAC) 2011: Kapstadt
- [16] Jung, F., Lachmann, M. und Christof, C. 2017: SmartFarm - Data Based Optimization for Optimal Energy Management. Proceedings of the 88th GAMM Annual Meeting of the international Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM): Weimar
- [17] Geiger, Carl und Kanzow, Christian (2002): Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben. Mit 140 Übungsaufgaben. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg
- [18] Büskens, Christof (2002): Echtzeitoptimierung und Echtzeitoptimalsteuerung parametergestörter Probleme. Habilitation: Universität Bayreuth
- [19] Meyer, Hannes (2016): Echtzeitoptimierung für Ausweichtrajektorien mittels der Sensitivitätsanalyse eines parametergestörten nichtlinearen Optimierungsproblems. Doktorarbeit: Universität Bremen
- [20] Fiacco, Anthony V. (1983): Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 165, AcademicPress, New York
- [21] Forster, Otto (2008): Analysis 2: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Vieweg+Teubner-Verlag: Wiesbaden
- [22] Geffken, Sören (2017): Effizienzsteigerung numerischer Verfahren der nichtlinearen Optimierung. Dissertation. Universität Bremen
- [23] Büskens, Christof (1998): Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustands-Beschränkungen. Doktorarbeit: Universität Münster
- [24] Nocedal, Jorge und Wright, Stephen J. (2006): Numerical Optimization. Springer Science+Business Media: New York
- [25] Wilson, Robert B. (1963): A Simplicial Algorithm for Concave Programming. Doktorarbeit: Harvard Business School. Boston

- [26] Gill, P. E., Murray, W. und Saunders, M. A. (2002): Snopt: An sqp algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*
- [27] Leyffer, Sven und Fletcher, Roger (1998). User Manual for Filtersqp. Numerical Analysis Report na/181. Technical report: University of Dundee
- [28] Büskens, Christof und Wassel, Dennis (2013): The ESA NLP Solver WORHP. In Fasano, Giorgio and Pintér, Janós D. (Hrsg.): *Modeling and Optimization in Space Engineering*. Springer-Verlag: New York
- [29] Schwarz, Hans R. und Köckler, Norbert (2011): *Numerische Mathematik*. Vieweg+Teubner-Verlag: Wiesbaden
- [30] Cain, M.B., O'Neill, R.P. und Castillo, A. (2012): History of Optimal Power Flow and Formulations. Optimal Power Flow Paper 1. Federal Energy Regulatory Commission
- [31] IAV GmbH: Internetseite der IAV Giffhorn. [www.iav.com/unternehmen/standorte/iav-giffhorn](http://www.iav.com/unternehmen/standorte/iav-giffhorn). Stand: 20.12.2017
- [32] Neplan AG: NEPLAN. Smarter Tools. [www.neplan.ch](http://www.neplan.ch). Stand: 20.12.2017
- [33] Schäfer, R., Geffken, S. und Büskens, C. (2017): WORHP Zen: Parametric Sensitivity Analysis for the Nonlinear Programming Solver WORHP.
- [34] Firmeninterne Dokumente der IAV GmbH