



Zentrum für Technomathematik
Fachbereich 3 – Mathematik und Informatik

**Über eine mathematische Aufgabe zum
Materialverhalten von Stahl mit
Phasenumwandlungen und
Umwandlungsplastizität**

Sören Boettcher

Report 12–01

Berichte aus der Technomathematik

Report 12–01

Februar 2012

Über eine mathematische Aufgabe zum Materialverhalten von Stahl mit Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität

S. Boettcher

Zentrum für Technomathematik, Fachbereich 3, Universität Bremen

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Diplomarbeit [Boe07] am Zentrum für Technomathematik der Universität Bremen im Sommersemester 2007. Aus hier nicht näher darzulegenden Gründen wurde sie damals nicht veröffentlicht. Da der Inhalt – wie ich meine – auch heute noch von großem Interesse sein dürfte, erscheint nun die Arbeit als Bericht aus der Technomathematik mit nur sehr leichten Änderungen gegenüber der ursprünglichen Version. Eine Fortsetzung dieser Arbeit, insbesondere unter Berücksichtigung der klassischen Plastizität, findet sich u.a. in meiner Dissertation [Boe12].

Kurzfassung

Stahl besitzt ein komplexes Materialverhalten. Besonderheiten sind die möglichen Phasenumwandlungen und die Umwandlungsplastizität, die bereits bei vergleichsweise geringen Spannungen zu bleibenden Verformungen führt. Aus diesem Grund müssen die klassischen Modelle der „Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen“ durch Hinzunahme der Umwandlungsplastizität, oft auch der klassischen Plastizität, erweitert werden.

Gekoppelte Modelle zum Materialverhalten von Stahl, die neben der Temperatur und der Deformation auch die Phasenumwandlungen beschreiben, sind bislang im engeren mathematischen und numerischen Kontext nur wenig untersucht worden.

Gegenstand dieser Arbeit ist, das komplexe Materialverhalten von Stahl (insbesondere die Phasenumwandlungen und die Umwandlungsplastizität) in allgemeinere Modelle der Thermoelastizität einzubinden und die Lösbarkeit der mathematischen Aufgabe der linearen Thermoelastizität unter Berücksichtigung von Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität zu untersuchen.

Abstract

Steel has a complex material behaviour. Special features are possible phase transitions and the transformation-induced plasticity, which already leads to permanent deformation at relatively low stress. For this reason, the classical models of thermo-elasticity with phase transitions have to be extended by adding the transformation-induced plasticity, often also the classical plasticity.

Coupled models for the material behavior of steel, which describe the phase transitions in addition to the temperature and the deformation have been insufficiently investigated in a strict mathematical and numerical context so far.

The work presented integrates the complex behavior of steel materials (especially the phase transformations and the transformation-induced plasticity) in general models of thermo-elasticity

and deals with the analysis of the mathematical problem of linear thermo-elasticity, taking into account phase transitions and transformation-induced plasticity.

Schlüsselworte

Thermoelastizität, Phasenumwandlungen, Umwandlungsplastizität, Evolutionsgleichungen, schwacher Lösungsansatz, Galerkin-Verfahren, Fixpunktprinzip

Danksagung

Diese Arbeit wurde durch den Sonderforschungsbereich (SFB) 570 „Distortion Engineering – Verzugsbeherrschung in der Fertigung“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) an der Universität Bremen und der Stiftung Institut für Werkstofftechnik (IWT) in Bremen angeregt. Mein Dank gilt Prof. Dr. M. Böhm und PD Dr. M. Wolff für die interessante Aufgabenstellung, die wissenschaftliche und organisatorische Betreuung, sowie für die zahlreichen Hinweise und Diskussionen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Zur Modellierung des Materialverhaltens von Stahl	3
3	Zu den untersuchten mathematischen Modellen	5
3.1	Lineare Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen	5
3.2	Lineare Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität	6
4	Mathematische Untersuchungen	8
4.1	Vorbereitungen	8
4.2	Diskussion der Modelle aus 3	8
4.3	Existenz und Eindeutigkeit von (\mathbf{P}_1)	13
4.3.1	Schwache Formulierung	13
4.3.2	Existenz- und Eindeutigkeitsresultat	14
4.4	Existenz und Eindeutigkeit von (\mathbf{P}_4)	15
4.4.1	Schwache Formulierung	15
4.4.2	Existenz- und Eindeutigkeitsresultat	16
4.5	Lösungsstrategie	16
5	Beweise der Resultate aus 4	17
5.1	Vorbereitungen	17
5.1.1	Zur Teilaufgabe A	17
5.1.2	Eigenschaften der Operatoren \mathbf{A}_u und \mathbf{A}_θ	20
5.2	Beweis des Satzes aus 4.3	22
5.2.1	Zur Teilaufgabe B	22
5.2.2	Betrachtung des Gesamtproblems	31
5.3	Beweis des Satzes aus 4.4	35
5.3.1	Zur Teilaufgabe B	35
5.3.2	Betrachtung des Gesamtproblems	43
6	Zusammenfassung	48

1 Einleitung

Die Weltproduktion von Stahl (in Tonnen) nimmt den zweiten Platz hinter Zement ein. Stahl und Eisenwerkstoffe werden in sehr verschiedenen Bereichen eingesetzt, wobei oft sehr hohe Qualitätsanforderungen an (End-)Geometrie, Gefüge, Oberflächengüte, Härte sowie weitere Eigenschaften der Bauteile gestellt werden (vgl. z.B. [BPT03] zu Fragen der Herstellung und Verarbeitung moderner Stahlwerkstoffe). Bedingt durch die besonderen Eigenschaften von Eisen-Kohlenstoff-Legierungen (vgl. z.B. [SLB95]) ergeben sich eine große Variabilität in den Eigenschaften und eine große Komplexität im Materialverhalten. Überdies erfolgt der Produktionsprozess von Stahlbauteilen in aller Regel über mehrere Stufen. Das alles stellt große Herausforderungen an die Modellierung und Simulation des Materialverhaltens, um Spannungs- und Deformationszustände sowie Phasenzusammensetzung vorherzusagen. Ein wichtiges Ziel der Modellierung und Simulation ist, den Verzug am Ende des Produktionsprozesses (also die unerwünschte Abweichung der Geometrie von der Norm) zu minimieren (vgl. hierzu etwa [HKLM02, SFB07]). Eine Besonderheit im Materialverhalten von Stahl sind die möglichen Phasenumwandlungen, die stark durch Temperaturgeschichte und Kohlenstoffgehalt bestimmt werden (vgl. [Hor92, Dah93, Koh94, Sei99, Ble01, BPT03, WW04, BT06]). Daher sind neben dem metalltypischen Verhalten (Thermoelasto-Plastizität, Viskoplastizität, ggf. Kriechen) auch die Wechselwirkungen mit den Phasenumwandlungen (und ggf. mit örtlich inhomogener Kohlenstoffkonzentration) zu berücksichtigen. Ein wichtiges Phänomen ist die Umwandlungsplastizität, die auftritt, wenn Phasenumwandlungen unter deviatorischen Spannungen ablaufen, selbst wenn die Fließgrenze der weicheren Phase nicht erreicht wird. In [WBH08] wurde ein makroskopisches Modell für das Materialverhalten von Stahl entwickelt, das Phasenumwandlungen, Umwandlungsplastizität und Plastizität einschließt und insbesondere die Wechselwirkungen zwischen Plastizität und Umwandlungsplastizität berücksichtigt. Es gibt Anwendungen, bei denen die Umwandlungsplastizität eine wesentliche Rolle spielt und die Plastizität vernachlässigbar ist (z.B. martensitisches Abschrecken, vgl. [SFHW09, FLHZ09]). In der vorliegenden Arbeit werden mathematische Modelle zu dem letztgenannten Fall analytisch untersucht, und zwar im Rahmen der geometrisch linearen Theorie („kleine Deformationen“), wie es z.B. bei Abschreckprozessen zulässig erscheint, wenn keine (großen) äußeren Kräfte einwirken. Die untersuchten Modelle beinhalten somit die lineare Thermoelastizität, die um Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität erweitert wird. Die Arbeit kann daher auch als Vorbereitung auf die nächste Herausforderung angesehen werden, nämlich die („klassische“, d.h. versetzungsbedingte) Plastizität in diesen Ansatz zu integrieren.

2 Zur Modellierung des Materialverhaltens von Stahl

Ein Modell für das Materialverhalten von Stahl im Rahmen der Kontinuumsmechanik umfasst die Bilanzen für Masse, Impuls, Drehimpuls, Energie und ggf. auch für die Entropie (sowie ggf. für die Kohlenstoffkonzentration und weitere Größen, wenn diese eine Rolle spielen). Die Massenbilanz führt zur zeitlich konstanten Dichte in der Referenzkonfiguration, die Bilanz des Drehimpulses zur Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors. Da nur *kleine* Deformationen betrachtet werden, was einer geometrischen Linearisierung entspricht, unterscheiden sich die Referenz- und aktuelle Konfiguration nur unwesentlich, und die Spannungstensoren fallen zusammen. Es wird weiter eine gegebene konstante makroskopische (homogene) Kohlenstoffkonzentration angenommen. Im Ergebnis der vorstehenden Überlegungen bleiben in dieser eingeschränkten Situation die beiden Bilanzen für Impuls und Energie in lokaler Form:

$$(2.1) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f} \quad (\text{Impuls- oder Bewegungsgleichung}),$$

$$(2.2) \quad \rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + r \quad (\text{Energiegleichung}).$$

Es werden Standard-Bezeichnungen benutzt: ρ_0 – Gesamtdichte in der Referenz- und somit auch aktuellen Konfiguration, \mathbf{u} – Verschiebungsvektor, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – linearisierter Greenscher Verzerrungstensor, $\boldsymbol{\sigma}$ – Cauchyscher Spannungstensor, \mathbf{f} – Volumendichte der äußeren Kräfte, e – Massendichte der inneren Energie, \mathbf{q} – Dichte des Wärmestromvektors, r – Volumendichte der Wärmezufuhr. Der Doppelpunkt „:“ bezeichnet das Skalarprodukt von Matrizen bzw. Tensoren 2. Stufe. Die Beziehungen (2.1) und (2.2) müssen im Orts-Zeit-Gebiet $\Omega \times]0, T[$ erfüllt sein. Für mathematische Untersuchungen wird angenommen, dass das Referenzgebiet, Ω , ein (beschränktes) Lipschitz-Gebiet sei, dessen Dimension bei konkreten Anwendungen gleich 1, 2 oder 3 ist. $T \in]0, \infty[$ steht für die Prozesszeit. Die bekannte Beziehung für $\boldsymbol{\varepsilon}$ lautet:

$$(2.3) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Um zu einem makroskopischen Modell für das Materialverhalten von Stahl zu gelangen, werden zusätzliche Annahmen getroffen:

- Stahl wird als Festkörper und als Mischung seiner Phasen betrachtet, die damit als Konstituenten angesehen werden.
- Eine Diffusion dieser Phasen – wie in allgemeinen Mischungen – wird ausgeschlossen. Als Konsequenzen enthalten die Umwandlungsgleichungen für die Phasen keine Diffusionsterme (s. (3.3) weiter unten).

Im Stahl können Phasenumwandlungen eine wesentliche Rolle spielen, insbesondere bei Wärmebehandlungen. Mit p_i wird der Massenanteil der i -ten Phase bezeichnet ($i = 1, \dots, N$), und abkürzend wird $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ verwendet. Aus den Definitionen der Massenanteile selbst folgen dann die Bilanzgleichung sowie die Nichtnegativitätsbeziehungen:

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Bei der weiteren Entwicklung des Modells werden (2.1), (2.2) und (2.4) durch Materialgesetze sowie Anfangs- und Randbedingungen ergänzt.

Bemerkung 2.1

- (i.) Die oben getroffenen Voraussetzungen sind durch das beobachtbare Verhalten von Stahl gestützt. Eine makroskopische Diffusion der einzelnen Phasen findet nicht statt, sie verbleiben am Ort ihres Entstehens. Ebenso wenig gibt es äußere Quellen und Senken für die Phasenumwandlungen.
- (ii.) Die Annahme kleiner Deformationen scheint bei Wärmebehandlungen von Stahlbauteilen zulässig, wenn nicht zusätzlich (größere) mechanische Kräfte einwirken, wie etwa beim Walzen oder Schmieden.
- (iii.) In der Werkstoffkunde wird beim *Stahl* traditionell mit Volumenanteilen gearbeitet. In der Mischungstheorie werden jedoch meist die Massenanteile bevorzugt. Da beim Stahl die Unterschiede zwischen Massen- und Volumenanteil derselben Phase (bei gleicher Temperatur) klein sind (im Bereich von einem bis zwei Prozent), muss nicht streng zwischen Massen- und Volumenanteilen unterschieden werden. Für ausführliche Ableitungen und Diskussionen sei auf [WBD03], für experimentelle Ergebnisse auf [WS03, WFL07] verwiesen. Es sei jedoch ausdrücklich hervorgehoben, dass selbst diese geringen Dichteunterschiede einen erheblichen Einfluss auf das Verzugsverhalten von Stahlbauteilen haben können.

Wie in der geometrisch-linearen Theorie üblich, wird der Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ gemäß

$$(2.5) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{te} + \boldsymbol{\varepsilon}_{in}$$

in die (thermo-)elastischen und inelastischen Anteile ε_{te} und ε_{in} zerlegt. Der inelastische Anteil wird ggf. seinerseits additiv zerlegt, z.B. in Anteile für die Plastizität und die Umwandlungsplastizität (vgl. z.B. [WBH08]).

3 Zu den untersuchten mathematischen Modellen

In dieser Arbeit werden zwei spezielle Modelle für das Materialverhalten von Stahl untersucht:

- Lineare Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen (vgl. 4.3)
- Lineare Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität (vgl. 4.4)

3.1 Lineare Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen

In diesem Fall lautet das **Materialgesetz für die Spannung**¹:

$$(3.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^* + K \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} - 3K_\alpha (\theta - \theta_0) \mathbf{I} - K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i \mathbf{I}.$$

$\rho_i(\theta_0)$ – Dichte der i -ten Phase zur Anfangstemperatur θ_0 , d.h., für $t = 0$, μ – Schubmodul, K – Kompressionsmodul, K_α – Modul, der Kompression und lineare Wärmeausdehnung des Gesamtmaterials berücksichtigt, \mathbf{I} – Einheitstensor sowie $N \in \mathbb{N}$ – Anzahl der Phasen. Der Deviator $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ des Tensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist gemäß $\boldsymbol{\varepsilon}^* := \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}$ (im 3D-Fall) definiert. Allgemein hängen die Materialparameter (Materialfunktionen) von der Temperatur und den Phasenanteilen ab. Wird von linearen Mischungsregeln ausgegangen, so hat man

$$(3.2) \quad \mu(\theta, \mathbf{p}) := \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta) p_i, \quad K(\theta, \mathbf{p}) := \sum_{i=1}^N K_i(\theta) p_i, \quad K_\alpha(\theta, \mathbf{p}) := \sum_{i=1}^N K_i(\theta) \alpha_i(\theta) p_i,$$

wobei $\mu_i > 0$, $K_i > 0$, α_i entsprechend Schubmodul, Kompressionsmodul und linearer Wärmeausdehnungskoeffizient der i -ten Phase sind. Für die **Umwandlungsgleichungen** für die Phasenanteile wählen wir einen allgemeinen Bilanz-Ansatz in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(3.3) \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = \gamma_i(\theta, \mathbf{p}) \quad \text{in } \Omega \times]0, T[\quad (i = 1, \dots, N)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(3.4) \quad p_i(x, 0) = p_{0i}(x) \quad \text{in } \Omega \quad (i = 1, \dots, N).$$

Aus der Bilanz in (2.4) folgt sofort die Bedingung:

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^N p_i' = 0.$$

Sinnvollerweise sollen die Bedingungen in (2.4) auch für die Anfangswerte gelten. In dieser Arbeit werden die Gleichungen (3.3) nicht näher strukturiert und nicht für einzelne Phasenumwandlungen konkret angegeben. Hierzu sei auf [WABM06, WBB07, WBBL07] verwiesen,

¹Das Materialgesetz (3.1) stellt eine Verallgemeinerung der Duhamel-Neumann-Beziehungen der linearen Thermoelastizität dar. Der letzte Summand in (3.1) berücksichtigt die Dichteänderungen infolge der Phasenumwandlungen. Um diesen Anteil von den thermischen Dehnungen zu trennen, erscheinen die Phasendichten zur Anfangstemperatur. Alternativ wäre es auch möglich, die beiden letzten Terme in (3.1) in einem zusammenzufassen (vgl. [WBD03]).

in denen allgemeine und spezielle Ansätze für Phasenumwandlungsmodelle diskutiert werden. Für die mathematische Untersuchung des Gesamtproblems ist wesentlich, dass für gegebenes θ die Cauchy-Aufgabe (3.3), (3.4) genau eine Lösung besitzt (vgl. 4.1 zu den genauen Voraussetzungen). Diese Cauchy-Aufgabe selbst wird in [Hüß07] gelöst. Allgemein können die rechten Seiten in (3.3) auch von der Spannung und weiteren Variablen abhängen (s. citeWol07c). Aus (2.1), (2.3) und (3.1) folgt die Bewegungsgleichung im Falle “Lineare Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen“:

$$(3.6) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - 2 \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div}(\mathbf{u})) + 3 \operatorname{grad}(K_\alpha (\theta - \theta_0)) + \\ + \operatorname{grad} \left(K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i \right) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \times]0, T[.$$

Aus der Gleichung (2.2) folgt nach den üblichen Ansätzen (Fourier-Ansatz für \mathbf{q} , Ansatz $e = e(\theta, \mathbf{p})$) sowie Linearisierungen die Wärmeleitungsgleichung (vgl. z.B. [WBH08]):

$$(3.7) \quad \rho_0 c_e \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\theta \nabla \theta) = -3K_\alpha \theta_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \rho_0 \sum_{i=2}^N L_i p_i' + r \quad \text{in } \Omega \times]0, T[.$$

Zusammen mit den Umwandlungsgleichungen (3.3) und der Anfangsbedingungen (3.4) sowie den Anfangs- und Randbedingungen

$$(3.8) \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{in } \Omega,$$

$$(3.9) \quad \mathbf{u}'(x, 0) = \mathbf{u}_1(x) \quad \text{in } \Omega,$$

$$(3.10) \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{in } \Omega,$$

$$(3.11) \quad \mathbf{u}(x, t) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0 \times]0, T[,$$

$$(3.12) \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\Gamma_1} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1 \times]0, T[,$$

$$(3.13) \quad -\lambda_\theta \nabla \theta \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma = \delta (\theta - \theta_\Gamma) \quad \text{auf } \partial\Omega \times]0, T[$$

ergibt sich ein gekoppeltes System aus hyperbolischen und parabolischer partieller Differentialgleichung sowie aus gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung von \mathbf{u} , θ und \mathbf{p} .

Dabei seien Ω – beschränktes Lipschitzgebiet mit Rand $\partial\Omega$, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ abgeschlossen mit positivem Oberflächenmaß, $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$, $\boldsymbol{\nu}_{\Gamma_1}$ – äußerer Normalenvektor an Γ_1 , $\boldsymbol{\nu}_\Gamma$ – äußerer Normalenvektor an $\partial\Omega$, c_e – spezifische Wärme (Wärmekapazität), λ_θ – Wärmeleitfähigkeit, L_i – latente Wärme der Umwandlung von der ersten in die i -te Phase ($i = 1, \dots, N$), δ – Wärmübergangskoeffizient und θ_Γ – Temperatur des umgebenden Mediums.

3.2 Lineare Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität

In diesem Fall wird der Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ gemäß (2.5) zerlegt, wobei die inelastische Verzerung $\boldsymbol{\varepsilon}_{in}$ ausschließlich durch die Umwandlungsplastizität hervorgerufen wird. Daher schreiben wir anstelle von (2.5)

$$(3.14) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{te} + \boldsymbol{\varepsilon}_{up}, \quad \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{up}) = 0.$$

Der thermoelastische Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}_{te}$ schließt die isotrope Volumendehnung ein, die auf die Dichteänderungen während der Phasenumwandlungen zurückgeht. Das Materialgesetz für die Spannungen lautet formal genau wie in (3.1), wobei $\boldsymbol{\varepsilon}$ durch $\boldsymbol{\varepsilon}_{te}$ ersetzt wird, so dass gilt:

$$(3.15) \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{te}^* + K \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{te}) \mathbf{I} - 3K_\alpha (\theta - \theta_0) \mathbf{I} - K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i \mathbf{I}.$$

Somit erhalten wir aus (2.1), (3.14) und (3.15) die Bewegungsgleichung

$$(3.16) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - 2 \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div}(\mathbf{u})) + 3 \operatorname{grad}(K_\alpha (\theta - \theta_0)) + \\ + \operatorname{grad} \left(K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i \right) + 2 \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{up}) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \times]0, T[.$$

Das Materialgesetz für die Umwandlungsplastizität (ohne Rückspannung; vgl. z.B. [WBH08]) im Fall mehrerer Phasen lautet:

$$(3.17) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{up}(x, t) = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \kappa_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_i}(p_i(x, s)) \max \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial s}(x, s), 0 \right\} \boldsymbol{\sigma}^*(x, s) ds.$$

Dabei sind κ_i der Greenwood-Johnson-Parameter und Φ_i die Sättigungsfunktion der i -ten Phase, wobei für alle $i = 1, \dots, m$ gelten sollen:

$$(3.18) \quad \kappa_i \geq 0, \quad \Phi_i(0) = 0, \quad \Phi_i(1) = 1, \quad 0 \leq \frac{\partial \Phi_i}{\partial p}(p) < \infty \quad \text{für alle } 0 < p < 1.$$

Zum Phänomen der Umwandlungsplastizität und ihrer Modellierung sei auf [Mit87, FST96, Fis97, FRW⁺00, Ahr03, WB03, WBS04, DL06, DLZ06, WB06a, WB06b] verwiesen. Wir verwenden im vorliegenden Fall die Umwandlungsgesetze (3.3) und die Wärmeleitungsgleichung (3.7) sowie die Anfangs- und Randbedingungen wie im vorigen Fall. Der aufgrund der Umwandlungsplastizität zusätzlich auftretende nichtlineare Dissipationsterm $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}'_{up}$ wird an dieser Stelle vernachlässigt. Für das Modell "Lineare Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität" erhalten wir somit ein gekoppeltes System, bestehend aus (3.16), (3.17), (3.7) und (3.3) zur Bestimmung von \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}_{up}$, θ und \mathbf{p} . Für $\boldsymbol{\varepsilon}_{up}$ wird allgemein die Anfangsbedingung

$$(3.19) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{up}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega$$

gestellt, die in der integralen Darstellung für $\boldsymbol{\varepsilon}_{up}$ in (3.17) bereits integriert ist. Die umwandlungsplastische Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}_{up}$ lässt sich mithilfe von

$$(3.20) \quad \boldsymbol{\sigma}^* = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{te}^* = 2\mu (\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_{up}), \quad \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 2\mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 2\mu \operatorname{div}(\mathbf{u})$$

als äquivalentes Anfangswertproblems formulieren und via die Lösungstheorie für lineare inhomogene gewöhnliche Differentialgleichungen aus dem System eliminieren:

$$(3.21) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{up}(x, t) = \int_0^t b(x, s, t) \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{u}(x, s)) ds, \quad \text{wobei}$$

$$(3.22) \quad b(x, s, t) := a(x, t) \exp \left(- \int_s^t a(x, \tau) d\tau \right),$$

$$(3.23) \quad a(x, t) := 3\mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_i}(p_i(x, t)) \max \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial t}(x, t), 0 \right\}, \quad (x, t) \in \Omega \times]0, T[.$$

4 Mathematische Untersuchungen

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die eindeutige Existenz einer schwachen Lösung der Aufgabe der linearen

- Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen (vgl. 4.3)
- Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität (vgl. 4.4) nachzuweisen.

4.1 Vorbereitungen

Wir wählen folgende Räume:

$$(4.1) \quad \mathbf{V}_u := \{\mathbf{u} \in [W^{1,2}(\Omega)]^3 : \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_0\}, \quad \mathbf{H}_u := [L^2(\Omega)]^3,$$

$$(4.2) \quad \mathcal{V}_u := L^2(0, T; \mathbf{V}_u), \quad \mathcal{H}_u := L^2(0, T; \mathbf{H}_u), \quad \mathcal{V}_u^* := L^2(0, T; \mathbf{V}_u^*),$$

wobei \mathbf{V}_u^* den Dualraum von \mathbf{V}_u bezeichnet,

$$(4.3) \quad V_\theta := W^{1,2}(\Omega), \quad H_\theta := L^2(\Omega), \quad K_\theta := L^{\frac{4}{3}}(\partial\Omega),$$

$$(4.4) \quad \mathcal{V}_\theta := L^2(0, T; V_\theta), \quad \mathcal{H}_\theta := L^2(0, T; H_\theta), \quad \mathcal{V}_\theta^* := L^2(0, T; V_\theta^*), \quad \mathcal{K}_\theta := L^2(0, T; K_\theta),$$

sowie

$$(4.5) \quad \mathbf{H}_p := [L^2(\Omega)]^N, \quad X := L^\infty(\Omega \times]0, T[), \quad \mathbf{X}_p := [X]^N, \quad \mathcal{V}_p := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbf{X}_p : \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \in \mathbf{X}_p \right\}$$

und fordern:

$$(4.6) \quad \mathbf{f} \in \mathcal{H}_u, \quad r \in \mathcal{H}_\theta, \quad \theta_\Gamma \in \mathcal{K}_\theta,$$

$$(4.7) \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}_u, \quad \mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}_u, \quad \theta_0 \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{p}_0 \in [L^\infty(\Omega)]^N,$$

$$(4.8) \quad \delta \in \mathbb{R}_0^+, \quad \rho_0, \mu_i, \lambda_i, K_i, \alpha_i, \theta_0, c_e, \lambda_\theta, L_i, \rho_i, \kappa_i \in \mathbb{R}^+ \quad (i = 1, \dots, N),$$

$$(4.9) \quad \gamma_i, \frac{\partial \gamma_i}{\partial \theta}, \frac{\partial \gamma_i}{\partial p_k} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar und beschränkt } (i, k = 1, \dots, N).$$

Ferner sei die Funktion γ in folgendem Sinne Lipschitz-stetig:

$$(4.10) \quad \exists L_\pi > 0 \forall \vartheta, \tilde{\vartheta} \in \mathbb{R} \forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^N : \|\gamma(\vartheta, \boldsymbol{\pi}) - \gamma(\tilde{\vartheta}, \boldsymbol{\pi})\|_\infty \leq L_\pi |\vartheta - \tilde{\vartheta}| \quad \text{sowie}$$

$$(4.11) \quad \exists L_\vartheta > 0 \forall \boldsymbol{\pi}, \tilde{\boldsymbol{\pi}} \in \mathbb{R}^N \forall \vartheta \in \mathbb{R} : \|\gamma(\vartheta, \boldsymbol{\pi}) - \gamma(\vartheta, \tilde{\boldsymbol{\pi}})\|_\infty \leq L_\vartheta \|\boldsymbol{\pi} - \tilde{\boldsymbol{\pi}}\|_\infty.$$

4.2 Diskussion der Modelle aus 3

Die Aufgabe aus Kap. 3.1 wird als Problem (P_1) in Abschnitt 4.3 behandelt. Bei der Untersuchung der Aufgabe aus Kap. 3.2 treten, bei der hier verfolgten Strategie, allerdings einige Schwierigkeiten auf. Allein die Behandlung der Teilaufgabe „Bewegungsgleichung gekoppelt mit Wärmeleitungsgleichung“ bringt Probleme mit sich, die im Folgenden näher beschrieben werden sollen. Insbesondere erfordern die Kopplungsterme in der Bewegungs- und der Wärmeleitungsgleichung sowie das Materialgesetz der Umwandlungsplastizität zusätzliche Anstregungen.

Wie bereits im Fall der linearen Thermoelastizität (vgl. [Boe07, Gaw86]), ist die erste A-priori-Abschätzung für den Grenzübergang in der Wärmeleitungsgleichung nicht ausreichend, da, bei diesem Zugang, aufgrund des Divergenzterms \mathbf{u}' mit Werten in \mathcal{V}_u benötigt wird.

- Für einfache Randbedingungen und zeitinvariante Parameter ist es zwar möglich, die Existenz einer schwachen Lösung unter geringeren Regularitätsforderungen an die Funktionen \mathbf{f} , r , θ_Γ , \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 , θ_0 und γ nachzuweisen, allerdings gelingt es mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht, die Eindeutigkeit unter diesen Voraussetzungen zu zeigen. Diese

ist jedoch ein wesentlicher Bestandteil des Beweises und sichert die Eindeutigkeit des Fixpunktoperators (s. Kap. 4.5). Ohne die Eindeutigkeit des Fixpunktoperators ist der Schaudersche Fixpunktsatz nicht anwendbar und wir gelangen auf diesem Wege nicht zu einer Lösung des Gesamtproblems.

Allerdings ist es unter den Voraussetzungen der Def. 4.8 möglich, die Existenz und die Eindeutigkeit einer schwachen Lösung der vorgestellten Aufgabe für einfache Randbedingungen und zeitinvariante Parameter nachzuweisen.

- (ii) Das Differenzieren der Galerkin-Gleichungen nach der Zeit ist nicht zielführend, da die Abschätzung der Terme des Materialgesetzes der Umwandlungsplastizität ohne Rückspannung:

$$2\theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} \mu \frac{d}{ds} \left[\int_0^s b(\tau, s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}''(s)) dx ds$$

auf „störende Produkte“ der folgenden Art führt:

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\theta'(s)| |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))| |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'(s))| dx ds,$$

die sich ohne zusätzliche Regularitätsforderungen an \mathbf{u} und/oder θ nicht abschätzen lassen. Das analoges Problem ergibt sich für den folgenden Term:

$$\frac{2\theta_0}{3} \int_0^t \int_{\Omega} \mu \frac{d}{ds} \left[\int_0^s b(\tau, s) \operatorname{div}(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \operatorname{div}(\mathbf{u}''(s)) dx ds.$$

Bemerkung 4.1 Für nichtkonstante Koeffizienten, d.h. für temperatur- und phasenabhängige Parameter ist ein Differenzieren der Galerkin-Gleichungen ebenfalls nicht zielführend. Insbesondere die mechanischen Parameter bereiten bei den A-priori-Abschätzungen der Kopplungsterme und des Operators $\mathbf{A}_{\mathbf{u}}$ (s. Kap. 5.1) Probleme, wenn diese von der Temperatur oder den Phasenanteilen abhängen. Beispielsweise führt die Abschätzung von

$$\int_0^t \int_{\Omega} \mu(\theta(s), \mathbf{p}(s)) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}''(s)) dx ds$$

wegen des Auftretens von partiellen Ableitungen der Parameter auf „störende“ Produkte der folgenden Form:

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta}(s) \theta'(s) + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{p}}(s) \boldsymbol{\gamma}(s) \right) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'(s)) dx ds$$

Für diese Konstellation lassen sich keine hinreichenden A-priori-Abschätzungen herleiten.

Bemerkung 4.2 Für den Fall, dass man beim Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitsresultats ohne zeitliche Differentiation auskommt, gibt es die Möglichkeit temperatur- und phasenabhängige Materialparameter zu betrachten. Einerseits lassen sich diese Nichtlinearitäten direkt mithilfe von Monotoniemethoden (z.B. Pseudomonotonie, Satz von Brezis, vgl. [Zei90b]) untersuchen, andererseits können die Nichtlinearitäten direkt in den Fixpunktalgorithmus mit eingebaut werden. Das jeweilige Teilproblem bleibt dann linear, die temperatur- und phasenabhängigen Parameter hängen in diesem Fall lediglich von einem fest vorgegebenem $\bar{\theta}$ bzw. $\bar{\mathbf{p}}$ ab.

- (iii) Die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung laut Def. 4.8 des vollen Problems mit allgemeinen (gemischten) Randbedingungen (3.11) – (3.13) zu zeigen, erscheint mit

den hier eingesetzten Techniken nicht auf offensichtliche Weise möglich. Ein alternativer Modellierungsansatz, um das volle Problem im Rahmen der Energiemethoden zu behandeln, sind Regularisierungen im Materialgesetz der Umwandlungsplastizität oder in den Kopplungstermen der Bewegungs- und der Wärmeleitungsgleichung.

Es werden folgende Möglichkeiten für ein regularisiertes physikalisches Modell diskutiert:

- a) Eine Idee ist, im Kopplungsterm der Bewegungsgleichung die Temperatur θ durch die im Fixpunktalgorithmus fest vorgegebene Temperatur $\bar{\theta}$ zu ersetzen. In diesem Fall heben sich die Kopplungsterme zwar nicht auf, allerdings ergeben sich hinreichende A-priori-Abschätzungen. Die Rechtfertigung dieses Vorgehens begründet sich in der Tatsache, dass die Gleichung für den Fixpunkt und somit auch für $\theta = \bar{\theta}$ gelten muss. Die Eindeutigkeit für \mathbf{u} folgt unmittelbar, da für fixiertes $\bar{\theta}$ der Kopplungsterm wegfällt. Im folgenden Schritt folgt dann auch die Eindeutigkeit für θ .
- b) Eine weitere Modellierungsoption ist, das Materialgesetz der Umwandlungsplastizität nicht zu verändern, auf das Differenzieren der Galerkin-Gleichungen zu verzichten und die Kopplungsterme zu regularisieren. Die zugehörige mathematische Aufgabe sei mit Problem (P_3) bezeichnet.

Wir ersetzen in der Wärmeleitungsgleichung die Zeitableitung von u durch den Differenzenquotienten

$$(4.12) \quad \Delta_{+h}\mathbf{u}(t) := \begin{cases} \frac{1}{h}(\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)) & \text{für } t \in [0, T-h] \\ 0 & \text{für } t \in]T-h, T] \end{cases}, \quad h > 0$$

und in der Bewegungsgleichung θ durch das Steklov-Mittel (vgl. [LSU68, Nau05])

$$(4.13) \quad \theta_h(t) := \begin{cases} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \theta(s) ds & \text{für } t \in]h, T] \\ 0 & \text{für } t \in [0, h] \end{cases}, \quad h > 0$$

Wir ersetzen in der Wärmeleitungsgleichung den Kopplungsterm

$$(4.14) \quad \begin{aligned} & 3 \int_0^t \int_{\Omega} K_{\alpha} \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}'(s)) \theta(s) dx ds \\ & \approx 3 \int_0^t \int_{\Omega} K_{\alpha} \theta_0 \operatorname{div}\left(\frac{1}{h}(\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t))\right) (1 - \chi_{[t-h, t]}) \theta(s) dx ds, \end{aligned}$$

wobei $\chi_{[a, b]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[a, b]$ ist. In der Bewegungsgleichung erhalten wir inklusive Multiplikation mit θ_0 nach der Ersetzung des Kopplungsterms

$$(4.15) \quad \begin{aligned} & -3\theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} K_{\alpha} (\theta(s) - \theta_0) \operatorname{div}(\mathbf{u}'(s)) dx ds \\ & \approx \underbrace{-3\theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} K_{\alpha} (\theta_h(s) - \theta_0) \operatorname{div}(\mathbf{u}'(s)) dx ds}_{=: I_1} \\ & = 3\theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} K_{\alpha} \frac{1}{h} \theta(s) \operatorname{div}(\mathbf{u}(s)) dx ds + \\ & \quad -3\theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} K_{\alpha} \frac{1}{h} \theta(s) \operatorname{div}(\mathbf{u}(s+h)) \chi_{[0, t-h]} dx ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3\theta_0 \int_{t-h}^t \int_{\Omega} K_{\alpha} \frac{1}{h} \theta(s) \operatorname{div}(\mathbf{u}(s)) \, dx \, ds + \\
& -3\theta_0 \int_{-h}^0 \int_{\Omega} K_{\alpha} \frac{1}{h} \theta(s) \operatorname{div}(\mathbf{u}(s+h)) \, dx \, ds + \\
& +3\theta_0^2 \int_{\Omega} K_{\alpha} \operatorname{div}(\mathbf{u}(t)) \, dx - 3\theta_0 \int_{\Omega} K_{\alpha} \int_{t-h}^t \theta(s) \, ds \operatorname{div}(\mathbf{u}(t)) \, dx
\end{aligned}$$

Nach der Addition von Gleichung (4.14) und (4.15) bleibt:

$$\begin{aligned}
I_1 &= 3\theta_0 \int_{t-h}^t \int_{\Omega} K_{\alpha} \frac{1}{h} \theta(s) \operatorname{div}(\mathbf{u}(s)) \, dx \, ds + \\
& -3\theta_0 \int_{-h}^0 \int_{\Omega} K_{\alpha} \frac{1}{h} \theta(s) \operatorname{div}(\mathbf{u}(s+h)) \, dx \, ds + \\
& +3\theta_0^2 \int_{\Omega} K_{\alpha} \operatorname{div}(\mathbf{u}(t)) \, dx - 3\theta_0 \int_{\Omega} K_{\alpha} \int_{t-h}^t \theta(s) \, ds \operatorname{div}(\mathbf{u}(t)) \, dx \\
\Rightarrow |I_1| &\leq 3\theta_0 K_{\alpha} \frac{1}{2} \left[\int_{t-h}^t \frac{1}{h} \|\theta(s)\|_{H_{\theta}}^2 \, ds + \int_{t-h}^t \frac{1}{h} \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \, ds \right] + \\
& +3\theta_0 K_{\alpha} \frac{1}{2} \left[\int_{-h}^0 \frac{1}{h} \|\theta(s)\|_{H_{\theta}}^2 \, ds + \int_{-h}^0 \frac{1}{h} \|\mathbf{u}(s+h)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \, ds \right] + \\
& +9\theta_0^4 K_{\alpha}^2 \frac{1}{\varepsilon} |\operatorname{meas}(\Omega)| + \varepsilon \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 + \\
& +3\theta_0 K_{\alpha} \frac{1}{2} \left[\int_{t-h}^t \frac{1}{h} \|\theta(s)\|_{H_{\theta}}^2 \, ds + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \right]
\end{aligned}$$

Die erste Möglichkeit ist die folgende Abschätzung. Aufgrund der Konvergenzeigenschaft des Steklov-Mittels folgt wegen der Beschränktheit mithilfe Standardabschätzungen

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq 3\theta_0 K_{\alpha} \frac{1}{2} [\|\theta(t)\|_{H_{\theta}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2] + \\
& +3\theta_0 K_{\alpha} \frac{1}{2} [\|\theta(0)\|_{H_{\theta}}^2 + \|\mathbf{u}(0)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2] + \\
& +9\theta_0^4 K_{\alpha}^2 \frac{1}{\varepsilon} |\operatorname{meas}(\Omega)| + \varepsilon \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \\
& +3\theta_0 K_{\alpha} \frac{1}{2} [\|\theta(t)\|_{H_{\theta}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2] \\
& = 3\theta_0 K_{\alpha} \|\theta(t)\|_{H_{\theta}}^2 + 3\theta_0 K_{\alpha} (1 + \varepsilon) \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 + \\
& +3\theta_0 K_{\alpha} \frac{1}{2} [\|\theta(0)\|_{H_{\theta}}^2 + \|\mathbf{u}(0)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2] + 9\theta_0^4 K_{\alpha}^2 \frac{1}{\varepsilon} |\operatorname{meas}(\Omega)|.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung hat den Vorteil, dass sie unabhängig vom Regularisierungsparameter h ist, allerdings wird eine (von h unabhängige) Kleinheitsbedingung an $\frac{3\theta_0 K_{\alpha}}{2}$ benötigt.

Als zweite Möglichkeit erhalten wir ohne diese Kleinheitsbedingung nur eine Abschätzung, die abhängig vom Regularisierungsparameter h ist:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq 3\theta_0 K_{\alpha} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\varepsilon_2 h} \right) \int_0^t \|\theta(s)\|_{H_{\theta}}^2 \, ds + 3\theta_0 K_{\alpha} \frac{1}{h} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \, ds + \\
& +9\theta_0^4 K_{\alpha}^2 \frac{1}{\varepsilon_1} |\operatorname{meas}(\Omega)| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2.
\end{aligned}$$

Nun stellt sich die Frage nach dem Grenzübergang für $h \rightarrow 0$. Sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Für alle $h_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) existiert genau eine schwache Lösung $(\mathbf{u}^{(n)}, \theta^{(n)})$ im regulierten Sinne. Die A-priori-Abschätzungen sind abhängig von h , aber der Grenzübergang ist wegen dem Kopplungsterm in der Wärmeleitungsgleichung im Allgemeinen nicht möglich. Falls $\mathbf{u}^{(n)}$ eine bessere Regularität besitzt, d.h. wenn $(\mathbf{u}^{(n)})' \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}$ gilt, wobei $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(\mathbf{u}^{(n)})'\|_{\mathcal{V}_{\mathbf{u}}} \leq \text{const.}$ unabhängig von h ist, dann existiert eine schwache Lösung (\mathbf{u}, θ) des vollständigen Problems und „ $(\mathbf{u}^{(n)}, \theta^{(n)}) \rightarrow (\mathbf{u}, \theta)$ “ für $n \rightarrow \infty$.

Mit dieser Vorgehensweise lässt sich zwar die Existenz einer schwachen Lösung nachweisen, allerdings ist deren Einzigkeit nicht gesichert.

Um die Eindeutigkeit einer schwachen Lösung zu zeigen, ist eine bessere Regularität der Lösung nötig. Der Regularisierungsstrick zum Beweis der Eindeutigkeit des Satzes zur linearen Elastizitätstheorie (vgl. [Zei90a] im Kontext von hyperbolischen Gleichungen) ist nicht anwendbar, da es nicht gelingt die Kopplungsterme entsprechend zu verarbeiten. Für den Fall vereinfachter Randbedingungen lässt sich die Eindeutigkeit für das vereinfachte Modell analog zum Beweis des Satzes zur linearen Thermoelastizitätstheorie (vgl. [Boe07, Gaw86]) zeigen.

- c) Eine mehr akademische Modellierungsalternative zur Lösung des Problems besteht in der Verwendung einer hyperbolischen Wärmeleitungsgleichung (vgl. [Mül72]). Im Weiteren wollen wir hier nicht weiter auf diese Option eingehen – der Ansatz führt allerdings mit den hier verwendeten Techniken auf das ursprüngliche Problem in Punkt (i) zurück.
- d) Eine andere mögliche Modellierungsoption besteht darin, das Materialgesetz der Umwandlungsplastizität zu regularisieren und die Kopplungsterme unverändert zu lassen. Die zugehörige mathematische Aufgabe bezeichnen wir mit Problem (P_4) bzw. (P_5) .

Ersetzt man im Materialgesetz der Umwandlungsplastizität ohne Rückspannung die Zeitableitung von \mathbf{p} durch einen Differenzenquotienten, z.B. durch den rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten erster Ordnung

$$\mathbf{p}'(t) \approx \Delta_{-h}\mathbf{p}(t) := \frac{\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t-h)}{h} (1 - \chi_{[0,t-h]}) , \quad h > 0$$

oder durch das Steklov-Mittel

$$\mathbf{p}'(t) \approx \mathbf{p}'_h(t) := \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \mathbf{p}'(s) \, ds \, \chi_{[0,t-h]} , \quad h > 0,$$

so gilt im Materialgesetz der Umwandlungsplastizität

$$(4.16) \quad a(s) := 3\mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_i}(p_i) \max\{\Delta_{-h} p_i(t), 0\} , \quad \text{wobei}$$

$$(4.17) \quad a(s) \leq c \|\boldsymbol{\gamma}\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{p}}}.$$

Dabei ist c eine positive, von h abhängige Konstante. Aufgrund von

$$\|\Delta_{-h}\mathbf{p}\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{p}}} \leq \|\mathbf{p}'\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{p}}} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{p}'_h\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{p}}} \leq \|\mathbf{p}'\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{p}}}$$

ist die erste A-priori-Abschätzung von h unabhängig, während die zweite A-priori-Abschätzung allerdings vom Regularisierungsparameter h abhängt. Wegen der (bei der hier benutzten Herangehensweise) Notwendigkeit des Differenzierens der Galerkin-Gleichungen werden bessere Regularitätsvoraussetzungen an die rechten Seiten, die Anfangsbedingungen, die Funktionen θ_{Γ} und $\boldsymbol{\gamma}$ sowie die wesentliche Beschränktheit

aller partiellen Ableitungen von γ gestellt. Ferner gelte $\Phi'' \in L^\infty(\Omega)$. Mit der Beschränktheit von \mathbf{p}' zum Zeitpunkt t gilt auch die Beschränktheit zu allen vorherigen Zeitpunkten und somit

$$\|\Delta_{-h}\mathbf{p}'\|_{\mathbf{x}_p} < \infty \quad \text{und} \quad \|\mathbf{p}'_h\|_{\mathbf{x}_p} < \infty.$$

Problem	Beschreibung
(P_1)	Aufgabe (3.3), (3.6), (3.7) mit (3.4),(3.8) – (3.13)
(P_2)	(P_1) mit (3.16) anstatt (3.6)
(P_3)	(P_2) mit $\text{div}(\Delta_{+h}\mathbf{u})$ anstatt $\text{div}(\mathbf{u}')$ in (3.7) und $\text{grad}(K_\alpha(\theta_h - \theta_0))$ anstatt $\text{grad}(K_\alpha(\theta - \theta_0))$ in (3.6) bzw. (3.16)
(P_4)	(P_2) mit $\Delta_{+h}\mathbf{p}$ anstatt \mathbf{p}' in (3.17)
(P_5)	(P_2) mit \mathbf{p}'_h anstatt \mathbf{p}' in (3.17)
(P_6)	(P_1) bzw. (P_2) mit $\mathbf{u} = 0$ auf $\partial\Omega \times]0, T[$ anstatt (3.11), (3.12)

Tabelle 1: Übersicht der Probleme

Die Tab. 1 fasst die, in diesem Abschnitt diskutierten, Problemstellungen nochmals zusammen. Im Weiteren wird als (regularisierte) Aufgabe die volle Aufgabe mit der Regularisierung im Materialgesetz der Umwandlungsplastizität (Problem (P_4)) betrachtet.

4.3 Existenz und Eindeutigkeit von (P_1)

Die Aufgabe besteht darin, die eindeutige Existenz einer schwachen Lösung des gekoppelten Systems

$$(4.18) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - 2 \text{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \text{grad}(\lambda \text{div}(\mathbf{u})) + 3 \text{grad}(K_\alpha(\theta - \theta_0)) + \\ + \text{grad} \left(K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i \right) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \times]0, T[,$$

$$(4.19) \quad \rho_0 c_e \frac{\partial \theta}{\partial t} - \text{div}(\kappa \nabla \theta) = -3K_\alpha \theta_0 \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \rho_0 \sum_{i=2}^N L_i p'_i + r \quad \text{in } \Omega \times]0, T[,$$

$$(4.20) \quad p'_i = \gamma_i(\theta, \mathbf{p}) \quad \text{in } \Omega \times]0, T[\quad (i = 1, \dots, N)$$

mit Rand- und Anfangsbedingungen (3.4), (3.8) – (3.13) nachzuweisen.

4.3.1 Schwache Formulierung

Definition 4.3 (Schwache Lösung) Unter den Voraussetzungen (3.18), (4.1) – (4.11) heißt ein Tripel $(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathcal{V}_u \times \mathcal{V}_\theta \times \mathcal{V}_p$ mit $\mathbf{u}' \in \mathcal{V}_u$ schwache Lösung der Aufgabe (4.18) – (4.20), (3.4), (3.8) – (3.13), falls gelten:

$$\begin{aligned}
(4.21) \quad & - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}'(t) \boldsymbol{\varphi}'(t) \, dx \, dt + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}(t)) \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt + 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha} (\theta(t) - \theta_0) \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt + \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt = \\
& \quad = \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \boldsymbol{\varphi}(t) \, dx \, dt + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_1 \boldsymbol{\varphi}(0) \, dx
\end{aligned}$$

für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ mit $\boldsymbol{\varphi}' \in \mathcal{H}_{\mathbf{u}}$ und $\boldsymbol{\varphi}(T) = 0$ sowie $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$,

$$\begin{aligned}
(4.22) \quad & - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 c_e \theta(t) \psi'(t) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \lambda_{\theta} \nabla \theta(t) \nabla \psi(t) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \delta \theta(t) \psi(t) \, d\sigma \, dt = \\
& = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \delta \theta_{\Gamma} \psi(t) \, d\sigma \, dt + 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha} \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}'(t)) \psi(t) \, dx \, dt + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i p_i'(t) \psi(t) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} r(t) \psi(t) \, dx \, dt + \int_{\Omega} \rho_0 c_e \theta_0 \psi(0) \, dx
\end{aligned}$$

für alle $\psi \in \mathcal{V}_{\theta}$ mit $\psi' \in \mathcal{H}_{\theta}$ und $\psi(T) = 0$,

$$(4.23) \quad p_i'(t) = \gamma_i(\theta(t), \mathbf{p}(t)), \quad i = 1, \dots, N$$

in $\Omega \times]0, T[$.

Bemerkung 4.4 Die zusätzliche Bedingung $\mathbf{u}' \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ ist notwendig, um den Grenzübergang im Divergenzterm in Gleichung (4.22) zu rechtfertigen. Im allgemeinen Fall besitzt die schwache Lösung unter den gegebenen Voraussetzungen nicht diese Regularität.

4.3.2 Existenz- und Eindeutigkeitsresultat

Im Unterschied zur instationären Aufgabe² der linearen Elastizitätstheorie (vgl. z.B. [Boe07, DL76, Zei88]) wird im Folgenden aufgrund der Kopplungsterme in der Bewegungs- und der Wärmeleitungsgleichung eine höhere Regularität der Lösung benötigt.

Eine Möglichkeit die nötige Regularität nachzuweisen, besteht darin, die Galerkin-Gleichungen nach der Zeit zu differenzieren und so zusätzliche a-priori-Abschätzungen zu gewinnen. Somit erhält man eine bessere Regularität von \mathbf{u} und die zusätzliche Voraussetzung $\mathbf{u}' \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ ist nicht nötig. Auf diese Weise ist es möglich, die kritischen Kopplungsterme zu neutralisieren.

Der Preis dieses Vorgehens ist allerdings, dass höhere Regularitätsforderungen an die rechten Seiten \mathbf{f} und r , die Funktion θ_{Γ} sowie die Anfangsbedingungen \mathbf{u}_0 und θ_0 gestellt werden müssen:

$$(4.24) \quad \mathbf{f} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{H}_{\mathbf{u}}), \quad r \in W^{1,2}(0, T; H_{\theta}), \quad \theta_{\Gamma} \in W^{1,2}(0, T; K_{\theta})$$

$$(4.25) \quad \mathbf{u}_0 \in [W^{2,2}(\Omega)]^3 \cap \mathbf{V}_{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{u}_1 \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}_{\mathbf{u}}, \quad \theta_1 \in \mathbb{R}^+,$$

wobei $\mathbf{u}''(x, 0) = \mathbf{u}_2(0)$ und $\theta'(x, 0) = \theta_1(0)$ in Ω .

Bemerkung 4.5 Bei entsprechenden Voraussetzungen an \mathbf{f} , r , θ_{Γ} , \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 und θ_0 lässt sich die Regularität der Lösung bzgl. t weiter erhöhen.

²Zur stationären Aufgabe vgl. [DL76, NH81, MH83, Cia88, Val88, Zei88, Boe07].

Satz 4.6 (Existenz und Eindeutigkeit für die Aufgabe der linearen Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen) *Unter den Voraussetzungen (3.18), (4.1) – (4.11), (4.24) – (4.25) besitzt die Aufgabe (4.18) – (4.20), (3.4), (3.8) – (3.13) genau eine schwache Lösung*

$$(4.26) \quad (\mathbf{u}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{V}_{\theta} \times \mathbf{V}_{\mathbf{p}}$$

mit $\mathbf{u}' \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}'' \in \mathcal{H}_{\mathbf{u}}$ und $\theta' \in \mathcal{H}_{\theta}$.

Bemerkung 4.7 Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 4.6 seien $\rho_0, \mu, \lambda, K, \alpha, \theta_0, c_e, \kappa, \delta, L_i, \rho_i, \kappa_i \in X$ ($i = 1, \dots, N$) Lipschitz-stetig. Dann folgt analog zum Beweis der Eindeutigkeit die stetige Abhängigkeit von den Parametern.

4.4 Existenz und Eindeutigkeit von (P₄)

Die Aufgabe besteht darin, die eindeutige Existenz einer schwachen Lösung des gekoppelten Systems

$$(4.27) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - 2 \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div}(\mathbf{u})) + 3 \operatorname{grad}(K_{\alpha}(\theta - \theta_0)) + \\ + \operatorname{grad} \left(K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i \right) + 2 \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{up}(\mathbf{u})) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \times]0, T[,$$

$$(4.28) \quad \rho_0 c_e \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_{\theta} \nabla \theta) = -3K_{\alpha} \theta_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \rho_0 \sum_{i=2}^N L_i \gamma_i + r \quad \text{in } \Omega \times]0, T[,$$

$$(4.29) \quad p'_i = \gamma_i(\theta, \mathbf{p}) \quad \text{in } \Omega \times]0, T[\quad (i = 1, \dots, N)$$

und (3.21) – (3.23) mit Rand- und Anfangsbedingungen (3.4), (3.8) – (3.13) nachzuweisen.

4.4.1 Schwache Formulierung

Definition 4.8 (Schwache Lösung) Unter den Voraussetzungen (3.18), (4.1) – (4.11) heißt ein Tripel $(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{V}_{\theta} \times \mathbf{V}_{\mathbf{p}}$ mit $\mathbf{u}' \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ schwache Lösung der Aufgabe (4.27) – (4.29), (3.4), (3.8) – (3.13), falls gelten:

$$(4.30) \quad - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}'(t) \boldsymbol{\varphi}'(t) \, dx \, dt + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt + \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}(t)) \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt + 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha}(\theta(t) - \theta_0) \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt + \\ + \int_0^T \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt + \\ + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \mu \int_0^t b(s, t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) \, ds \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt + \\ - \frac{2}{3} \int_0^T \int_{\Omega} \mu \int_0^t b(s, t) \operatorname{div}(\mathbf{u}(s)) \, ds \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, dx \, dt = \\ = \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \boldsymbol{\varphi}(t) \, dx \, dt + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_1 \boldsymbol{\varphi}(0) \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}$ mit $\varphi' \in \mathcal{H}_{\mathbf{u}}$ und $\varphi(T) = 0$ sowie $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$,

$$(4.31) \quad \begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 c_e \theta(t) \psi'(t) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \lambda_{\theta} \nabla \theta(t) \nabla \psi(t) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \delta \theta(t) \psi(t) \, d\sigma \, dt = \\ & = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \delta \theta_{\Gamma} \psi(t) \, d\sigma \, dt + 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha} \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}'(t)) \psi(t) \, dx \, dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i p_i'(t) \psi(t) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} r(t) \psi(t) \, dx \, dt + \int_{\Omega} \rho_0 c_e \theta_0 \psi(0) \, dx \end{aligned}$$

für alle $\psi \in \mathcal{V}_{\theta}$ mit $\psi' \in \mathcal{H}_{\theta}$ und $\psi(T) = 0$,

$$(4.32) \quad p_i'(t) = \gamma_i(\theta(t), \mathbf{p}(t)), \quad i = 1, \dots, N$$

in $\Omega \times]0, T[$.

4.4.2 Existenz- und Eindeutigkeitsresultat

Satz 4.9 (Existenz für die (regularisierte) Aufgabe der linearen Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität) *Unter den Voraussetzungen (3.18), (4.1) – (4.11), (4.24) – (4.25) besitzt die Aufgabe (4.27) – (4.29), (3.4), (3.8) – (3.13) mindestens eine schwache Lösung*

$$(4.33) \quad (\mathbf{u}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{V}_{\theta} \times \mathcal{V}_{\mathbf{p}}$$

mit $\mathbf{u}' \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}'' \in \mathcal{H}_{\mathbf{u}}$ und $\theta' \in \mathcal{H}_{\theta}$.

Bemerkung 4.10 Die Eindeutigkeit folgt für den eindimensionalen Fall ohne zusätzliche Voraussetzungen. Die Umformulierung des Problems und die sich daraus ergebenden Apriori-Abschätzungen liefern: $\theta \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$, $\theta' \in \mathcal{H}_{\theta}$ und damit $\theta \in C(0, T; V_{\theta})$. Da für beschränkte $\Omega \subset \mathbb{R}$ gilt: $V_{\theta} \subset C(\bar{\Omega}) \subset L^{\infty}(\Omega)$, folgt $\theta \in X$ und somit die Eindeutigkeit der Lösung des Problems (vgl. [HK06, CHK07]).

Für den allgemeinen Fall kann hier ohne weitere Regularitätsforderungen an die Lösung keine Aussage gemacht werden.

Satz 4.11 (Eindeutigkeit für die (regularisierte) Aufgabe der linearen Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität) *Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 4.9 gebe es mindestens eine Lösung $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}$ mit*

$$(4.34) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \in X^{3 \times 3}, \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1)\|_{X^{3 \times 3}} \leq \mathbf{c}_{\nabla},$$

d.h. mindestens eine Lösung soll bessere Regularitätseigenschaften besitzen. Dann ist die schwache Lösung $(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{V}_{\theta} \times \mathcal{V}_{\mathbf{p}}$ der Aufgabe (4.27) – (4.29), (3.8) – (3.13) im Sinne des Satzes 4.9 eindeutig.

Bemerkung 4.12 Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 4.11 seien $\rho_0, \mu, \lambda, K, \alpha, \theta_0, c_e, \kappa, \delta, L_i, \rho_i, \kappa_i \in X$ ($i = 1, \dots, N$) Lipschitz-stetig. Dann folgt analog zum Beweis der Eindeutigkeit die stetige Abhängigkeit von den Parametern.

4.5 Lösungsstrategie

Um die eindeutige Existenz einer schwachen Lösung $(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{V}_{\theta} \times \mathcal{V}_{\mathbf{p}}$ im Sinne der Def. 4.3 bzw. Def. 4.8 nachzuweisen, wenden wir im Weiteren die folgende Lösungsstrategie an:

Zunächst wird für gegebenes $\bar{\theta} \in \mathcal{H}_\theta$ die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_\mathbf{p}$ der Aufgabe (3.3), (3.4) gezeigt. Die Beweisidee beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz und wird in [Hüß07] ausgeführt. Diese Teilaufgabe bezeichnen wir als *Teilproblem A*.

In einem zweiten Schritt wird für fixiertes $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_\mathbf{p}$ die eindeutige Existenz einer schwachen Lösung $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathcal{V}_\mathbf{u} \times \mathcal{V}_\theta$ der Teilaufgabe (4.18), (4.19) bzw. (4.27), (4.28), (3.8) – (3.13) mithilfe des Galerkin-Verfahrens gezeigt. Diese Teilaufgabe wird im Folgenden als *Teilproblem B* bezeichnet.

Teilproblem	Beschreibung
A	Aufgabe (3.3), (3.4) für gegebenes $\bar{\theta} \in \mathcal{H}_\theta$
B	Aufgabe (4.18), (4.19) bzw. (4.27), (4.28) mit (3.8) – (3.13) für fixiertes $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_\mathbf{p}$

Tabelle 2: Übersicht der Teilprobleme

Damit ist ein Operator

$$(4.35) \quad \mathbf{T} : (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \mapsto \mathbf{p} \mapsto (\mathbf{u}, \theta)$$

definiert. Um die Existenz einer schwachen Lösung $(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathcal{V}_\mathbf{u} \times \mathcal{V}_\theta \times \mathcal{V}_\mathbf{p}$ im Sinne der Def. 4.3 bzw. Def. 4.8 für das Gesamtproblem nachzuweisen, ist es hinreichend zu zeigen, dass der Operator T einen Fixpunkt besitzt. Zum Beweis dieser Eigenschaft findet der Schaudersche Fixpunktsatz seine Anwendung. Ferner bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen, da der Schaudersche Satz nur eine Existenzaussage liefert (vgl. Kap. 5.2.2 bzw. Kap. 5.3.2).

Die Tab. 2 gibt eine Übersicht über die Teilprobleme A und B. Die Abb. 1 veranschaulicht graphisch die zuvor beschriebene Lösungsstrategie.

5 Beweise der Resultate aus 4

5.1 Vorbereitungen

5.1.1 Zur Teilaufgabe A

Sei $\bar{\theta} \in \mathcal{H}_\theta$ gegeben. Wir betrachten das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(5.1) \quad \frac{\partial p_i(x, t)}{\partial t} = \gamma_i(\bar{\theta}(x, t), \mathbf{p}(x, t)), \quad x \in \Omega, \quad t \in]0, T[$$

$$(5.2) \quad p_i(x, 0) = p_{i0}(x), \quad x \in \Omega$$

für $i = 1, \dots, N$.

Bemerkung 5.1 Das Anfangswertproblem (5.1), (5.2) lässt sich abstrakt als gewöhnliches Differentialgleichungssystem im Banachraum $L^\infty(\Omega)$ formulieren (vgl. [Emm04]).

Satz 5.2 (Globale Existenz und Eindeutigkeit) *Unter den Voraussetzungen (4.7)₄, (4.9) – (4.11) existiert genau eine Lösung $\mathbf{p} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{H}_\mathbf{p}) \cap \mathcal{V}_\mathbf{p}$ des Anfangswertproblems (5.1), (5.2) für gegebenes $\bar{\theta} \in \mathcal{H}_\theta$.*

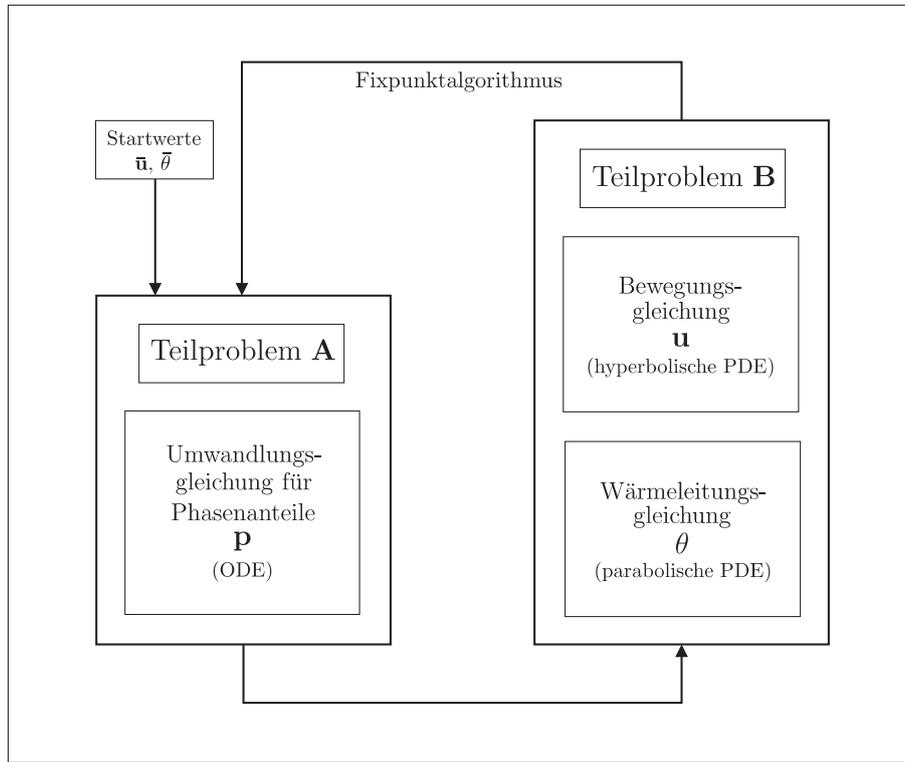


Abbildung 1: Schema der Lösungsstrategie

Die Idee des Beweises von Satz 5.2 (s. [Hüß07] für Details) besteht darin, das Differentialgleichungssystem mit Abhängigkeit von dem (Orts-)Parameter x und von der Zeit t , deren Ableitung betrachtet wird, sowie bzgl. des Parameters messbarer rechter Seite in ein Operatorproblem zu transformieren. Weiter lässt sich zeigen, dass der Fixpunkt des Operatorproblems auch die Anfangswertaufgabe löst.

Definiere den (vorerst formalen) Operator

$$(5.3) \quad \mathcal{A} : \mathbf{X}_{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{X}_{\mathbf{p}}$$

$$(5.4) \quad \mathbf{p}(x, t) \mapsto (\mathcal{A}\mathbf{p})(x, t) := \mathbf{p}_0(x) + \int_0^t \gamma(\theta(x, s), \mathbf{p}(x, s)) ds$$

für fast alle $(x, t) \in \Omega \times]0, T[$, für $\mathbf{p} \in \mathbf{X}_{\mathbf{p}}$ und für fixiertes $\theta \in \mathcal{H}_{\theta}$.

Es ist nun zeigen, dass

(i) $\mathcal{A} : \mathbf{X}_{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{X}_{\mathbf{p}}$, d.h.

a) Für alle $\mathbf{p} \in \mathbf{X}_{\mathbf{p}}$ ist $\mathcal{A}\mathbf{p} : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^N$ Lebesgue-messbar.

b) Für alle $\mathbf{p} \in \mathbf{X}_{\mathbf{p}}$ gilt: $\|\mathcal{A}\mathbf{p}\|_{\mathbf{X}_{\mathbf{p}}} := \text{ess sup}_{(x,t) \in \Omega \times]0, T[} \|(\mathcal{A}\mathbf{p})(x, t)\|_{\infty} < \infty$.

und

(ii) \mathcal{A} ist eine strikt kontraktive Selbstabbildung auf einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbf{X}_{\mathbf{p}}$.

Der Banachsche Fixpunktsatzes liefert genau einen Fixpunkt und daher besitzt der Operator \mathcal{A} genau einen Fixpunkt bzw. die Gleichung

$$(5.5) \quad \mathbf{p}(x, t) := \mathbf{p}_0(x) + \int_0^t \gamma(\theta(x, s), \mathbf{p}(x, s)) ds$$

ist eindeutig lösbar für alle $0 \leq t \leq T$ und für fast alle $x \in \Omega$. Jedes \mathbf{p} ist für fast alle $x \in \Omega$ eine auf $[0, T]$ absolut-stetige Funktion, da $\mathbf{p} \in L^{\infty}([0, T])$ für fast alle $x \in \Omega$. Dann besitzt

jedes \mathbf{p} für die zugelassenen $x \in \Omega$ und für fast alle $t \in]0, T[$ eine klassische Ableitung, die eine Funktion aus $L^\infty(]0, T[)$ darstellt und gleichzeitig schwache Ableitung ist. Zudem gilt fast überall $\mathbf{p}(x, 0) = \mathbf{p}_0(x)$ in Ω . Also besitzt jedes \mathbf{p} eine schwache Zeitableitung in $\mathbf{X}_{\mathbf{p}}$, d.h. es gilt $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_{\mathbf{p}}$. Weiterhin folgt:

$$(5.6) \quad \frac{\partial \mathbf{p}(x, t)}{\partial t} = \gamma(\theta(x, t), \mathbf{p}(x, t))$$

$$(5.7) \quad \mathbf{p}(x, 0) = \mathbf{p}_0(x)$$

für fast alle $t \in]0, T[$ und für fast alle $x \in \Omega$.

Ferner lässt sich die stetige Abhängigkeit von dem Parameter θ nachweisen:

Lemma 5.3 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.2 sowie (4.10), (4.11) existiert für alle $\theta \in \mathcal{H}_\theta$ genau eine Lösung $\mathbf{p} = \mathbf{p}_\theta \in \mathcal{V}_{\mathbf{p}}$, welches die Anfangswertaufgabe (5.1), (5.2) auf $[0, T]$ erfüllt. Ferner sind die Abbildungen $\theta \mapsto \mathbf{p}_\theta$ und $\theta \mapsto \mathbf{p}'_\theta$ stetig in folgendem Sinn: Für jede Folge $(\theta^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_\theta$ mit*

$$\theta^k \rightarrow \theta \text{ in } \mathcal{H}_\theta \text{ folgt } \begin{cases} \mathbf{p}_\theta^k \rightarrow \mathbf{p}_\theta & \text{in } L^\infty(0, T; \mathbf{H}_{\mathbf{p}}) \\ (\mathbf{p}'_\theta)^k \rightarrow \mathbf{p}'_\theta & \text{in } [L^2(\Omega \times]0, T[)]^N \end{cases}.$$

Im Folgenden wird kurz auf die Beweisidee der stetigen Abhängigkeit eingegangen. Für Details sei auf [Hüß07] verwiesen. Mithilfe der Lipschitz-Stetigkeit der Funktion γ folgt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_\theta^k(x, s) - \mathbf{p}_\theta(x, s)\|_\infty &\leq \int_0^t \|\gamma(\theta^k(x, s), \mathbf{p}_\theta^k(x, s)) - \gamma(\theta(x, s), \mathbf{p}_\theta(x, s))\|_\infty ds \\ &\leq \int_0^t \|\gamma(\theta^k(x, s), \mathbf{p}_\theta(x, s)) - \gamma(\theta(x, s), \mathbf{p}_\theta(x, s))\|_\infty ds + \\ &\quad + \int_0^t \|\gamma(\theta(x, s), \mathbf{p}_\theta^k(x, s)) - \gamma(\theta(x, s), \mathbf{p}_\theta(x, s))\|_\infty ds \\ &\leq \int_0^t L_{\mathbf{p}} |\theta^k(x, s) - \theta(x, s)| ds + \int_0^t L_\theta \|\mathbf{p}_\theta^k(x, s) - \mathbf{p}_\theta(x, s)\|_\infty ds \end{aligned}$$

Integration über Ω liefert mithilfe des Satzes von Fubini und des Lemmas von Gronwall:

$$(5.8) \quad \|\mathbf{p}_\theta^k(t) - \mathbf{p}_\theta(t)\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{p}}}^2 \leq c \|\theta^k - \theta\|_{\mathcal{H}_\theta}^2 \text{ für fast alle } t \in]0, T[.$$

Ferner gilt aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von γ , mithilfe der Integration über $\Omega \times]0, T[$ und Anwendung der Hölderschen und Youngschen Ungleichung:

$$(5.9) \quad \|(\mathbf{p}'_\theta)^k - \mathbf{p}'_\theta\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{p}}} \leq c_1 \|\theta^k - \theta\|_{\mathcal{H}_\theta}^2 + c_2 \|(\mathbf{p}_\theta^k) - \mathbf{p}_\theta\|_{[L^2(\Omega \times]0, T[)]^N}.$$

Damit folgt aus der Konvergenz $\theta^k \rightarrow \theta$ in \mathcal{H}_θ zunächst die Konvergenz $\mathbf{p}_\theta^k \rightarrow \mathbf{p}_\theta$ in $L^\infty(0, T; \mathbf{H}_{\mathbf{p}})$ (s. (5.8)) und mit (5.9) letztlich $(\mathbf{p}'_\theta)^k \rightarrow \mathbf{p}'_\theta$ in $[L^2(\Omega \times]0, T[)]^N$.

Bemerkung 5.4 Seien $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{H}_{\mathbf{u}}$ sowie $\bar{\theta} \in \mathcal{H}_\theta$ gegeben. Unter analogen Voraussetzungen des Satzes 5.2 existiert genau eine Lösung $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_{\mathbf{p}}$ des Anfangswertproblems

$$(5.10) \quad \frac{\partial p_i(x, t)}{\partial t} = \gamma_i(\bar{\mathbf{u}}(x, t), \bar{\theta}(x, t), \mathbf{p}(x, t)), \quad t \in]0, T[, \quad x \in \Omega$$

$$(5.11) \quad p_i(x, 0) = p_{i0}(x), \quad x \in \Omega$$

für $i = 1, \dots, N$ (vgl. [Hüß07]).

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass in der Arbeit von [Hüß07] etwas andere Bezeichnungen verwendet werden.

Lemma 5.5 *Unter zusätzlichen Bedingungen an die Struktur der rechten Seite γ der Gleichung (5.1) (s. [Hüß07] für Details) und*

$$(5.12) \quad p_{i0}(x) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N p_{0i}(x) = 1$$

für alle $x \in \Omega$ folgt

$$(5.13) \quad 0 \leq p_i(x, t) \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N p_i(x, t) = 1$$

für fast alle $(x, t) \in \Omega \times]0, T[$.

Zum Beweis von Lemma 5.5 sei auf [Hüß07] verwiesen. An dieser Stelle werden lediglich die Beweisideen skizziert.

Die rechten Seiten der Gleichung (5.1) summieren sich zu Null. Zum Zeitpunkt $t = 0$ summieren sich die einzelnen Phasenanteile zu Eins und in der Summe der Phasenanteile gibt es keine Veränderung, also gilt auch für jede Lösung \mathbf{p} die Bilanz-Bedingung (5.13).

Der Beweis der Nichtnegativität ist ein Spezialfall einer allgemeineren Situation in der chemischen Reaktionskinetik (vgl. [VC75]).

5.1.2 Eigenschaften der Operatoren \mathbf{A}_u und \mathbf{A}_θ

Definition und Lemma 5.6 *Sei (4.1) gegeben. Für den Operator $\mathbf{A}_u : \mathbf{V}_u \rightarrow \mathbf{V}_u^*$ mit*

$$(5.14) \quad \langle \mathbf{A}_u \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} := -2 \int_{\Omega} \mu \varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{w}) \, dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(\mathbf{v}) \operatorname{div}(\mathbf{w}) \, dx \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_u,$$

gilt

- (i) $\mathbf{A}_u \in L(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_u^*)$,
- (ii) \mathbf{A}_u ist symmetrisch, d.h. für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_u$: $\langle \mathbf{A}_u \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} = \langle \mathbf{A}_u \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u}$,
- (iii) \mathbf{A}_u ist stark positiv (koerziv), d.h. es gibt eine positive Konstante c , so dass für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_u$: $\langle \mathbf{A}_u \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} \geq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_u}^2$.

Bemerkung 5.7 Für den Fall, dass das Oberflächenmaß von Γ_0 identisch Null ist, ist der Operator \mathbf{A}_u nicht koerziv, jedoch gibt es eine positive Zahl c , so dass für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_u$ gilt: $\langle \mathbf{A}_u \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_u}^2 \geq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_u}^2$ (vgl. 3. Kornsche Ungleichung in [DL76, Nit81, Zei88]).

Bemerkung 5.8 Folgende Darstellungen sind äquivalent:

$$(5.15) \quad \langle \mathbf{A}_u \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{w}) \, dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \nabla \mathbf{w} \, dx \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_u.$$

Beweis. Im Folgenden werden nur die Beweise der starken Positivität und der Stetigkeit erläutert. Zu (iii): Wegen

$$\langle \mathbf{A}_u \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} = \underbrace{2 \int_{\Omega} \mu \varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, dx}_{=: I_1} + \underbrace{\int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(\mathbf{v}) \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx}_{=: I_2} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_u$$

und der 2. Kornschen Ungleichung (vgl. [DL76, Nit81, Zei88])

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \geq c \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}$$

ergibt sich $I_1 \geq c \|u\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2$ sowie offensichtlich $I_2 \geq 0$.

Zu (i): Mithilfe der Definition folgt:

$$|\langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}}| \leq 2\mu \underbrace{\int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})| \, dx}_{=: I_1} + \lambda \underbrace{\int_{\Omega} |\operatorname{div}(\mathbf{v}) \operatorname{div}(\mathbf{w})| \, dx}_{=: I_2} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}.$$

Die Betrachtung der einzelnen Terme liefert unter Benutzung der Hölderschen und Youngschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left(\int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left| \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (|\nabla \mathbf{v}| + |\nabla \mathbf{v}^T|) \right)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (|\nabla \mathbf{w}| + |\nabla \mathbf{w}^T|) \right)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left(\int_{\Omega} |\operatorname{div}(\mathbf{v})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\operatorname{div}(\mathbf{w})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}} \end{aligned}$$

wegen

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}.$$

□

Definition und Lemma 5.9 Sei (4.3) gegeben. Der gemäß

$$(5.16) \quad \langle \mathbf{A}_{\theta} v, w \rangle_{V_{\theta}^* V_{\theta}} := \int_{\Omega} \lambda_{\theta} \nabla v \nabla w \, dx + \int_{\partial \Omega} \delta v w \, d\sigma \quad \forall v, w \in V_{\theta}$$

definierte Operator $\mathbf{A}_{\theta} : V_{\theta} \rightarrow V_{\theta}^*$ ist linear und stetig, symmetrisch sowie stark positiv.

Beweis. Im Folgenden werden nur die starke Positivität und die Stetigkeit des Operators betrachtet.

Zu (iii): Nach Definition und wegen der Normäquivalenz folgt:

$$\langle \mathbf{A}_{\theta} v, v \rangle_{V_{\theta}^* V_{\theta}} = \int_{\Omega} \lambda_{\theta} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\partial \Omega} \delta |v|^2 \, d\sigma \geq c \|v\|_{V_{\theta}}^2.$$

Zu (i): Nach Definition sowie unter Benutzung von Standardabschätzungen folgt:

$$\begin{aligned}
\left| \langle \mathbf{A}_\theta v, w \rangle_{V_\theta^* V_\theta} \right| &= \left| \int_\Omega \lambda_\theta \nabla v \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega} \delta v w \, d\sigma \right| \\
&\leq \int_\Omega \lambda_\theta |\nabla v| |\nabla w| \, dx + \int_{\partial\Omega} \delta |v| |\varphi| \, d\sigma \\
&\leq \lambda_\theta \|\nabla v\|_{H_\theta} \|\nabla w\|_{H_\theta} + \delta \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \|w\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \lambda_\theta \|\nabla v\|_{H_\theta} \|\nabla w\|_{H_\theta} + c \delta \|v\|_{V_\theta} \|w\|_{V_\theta} \\
&\leq c \|v\|_{V_\theta} \|w\|_{V_\theta}.
\end{aligned}$$

□

5.2 Beweis des Satzes aus 4.3

5.2.1 Zur Teilaufgabe B

Satz 5.10 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz für die Teilaufgabe B) *Unter den Voraussetzungen (4.1) – (4.4), (4.6), (4.7), (4.24), (4.25) besitzt die Aufgabe (4.21), (4.22), (3.8) – (3.13) genau eine schwache Lösung $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{V}_\mathbf{u} \times \mathcal{V}_\theta$, d.h. es gelten: Gleichung (4.21) in $\Omega \times]0, T[$ für alle $\varphi \in \mathbf{V}_\mathbf{u}$ mit $\varphi' \in \mathcal{H}_\mathbf{u}$ und $\varphi(T) = 0$ sowie $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, Gleichung (4.22) in $\Omega \times]0, T[$ für alle $\psi \in \mathcal{V}_\theta$ mit $\psi' \in \mathcal{H}_\theta$ und $\psi(T) = 0$. Ferner gelten:*

$$(5.17) \quad \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}_\mathbf{u}), \mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}_\mathbf{u}), \mathbf{u}'' \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_\mathbf{u}),$$

sowie

$$(5.18) \quad \theta \in L^\infty(0, T; H_\theta), \theta' \in L^\infty(0, T; H_\theta).$$

In der Literatur finden sich umfassende Darstellungen zur Lösung der mathematischen Aufgabe der linearen Elastizitätstheorie (stationär sowie instationär; vgl. z.B. [DL76, MH83, Cia88, Val88, Zei88]) und Thermoelastizitätstheorie (vgl. etwa [Boe07, Gaw86]).

Eine allgemeine Einführung zur Lösung von Evolutionsgleichungen mittels der Galerkin-Methode findet sich z.B. in [GGZ74, DL76, Wlo87, Zei90b, Bra92, DL92, RR96, Eva98, HR99, Emm04, Rou05] und speziell im Kontext der vorliegenden Arbeit in [Boe07]. Im vorliegenden Kapitel soll die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung der Anfangswert-Randwert-Aufgabe für ein System hyperbolischer und einer parabolischen partiellen Differentialgleichung im Zusammenhang mit der linearen instationären Thermoelastizitätstheorie mithilfe des Galerkin-Verfahrens nachgewiesen werden. Es wird dabei die volle Aufgabe untersucht und auch auf Spezialfälle, wie beispielsweise die Aufgabenstellung mit vereinfachten Randbedingungen (vgl. [Gaw86]), eingegangen.

Im Folgenden soll der Beweis von Satz 5.10 mithilfe des simultanen Galerkin-Verfahrens durchgeführt werden, d.h. es werden beide Gleichungen simultan mit dem Galerkin-Verfahren behandelt. Nach den nötigen A-priori-Abschätzungen werden die schwachen Grenzübergänge vollzogen.

Beweis. Der Beweis gliedert sich wie folgt:

- (i) Existenz der Galerkin-Lösungen
- (ii) A-priori-Abschätzungen
- (iii) Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$
- (iv) Eindeutigkeit

Zu (i): Seien $(\mathbf{w}_{\mathbf{u}j})_{j \in \mathbb{N}}$ und $(w_{\theta j})_{j \in \mathbb{N}}$ Galerkin-Basen in $\mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ bzw. V_{θ} sowie $(\mathbf{V}_{\mathbf{u}m})_{m \in \mathbb{N}}$ mit $\mathbf{V}_{\mathbf{u}m} := \text{span}\{\mathbf{w}_{\mathbf{u}1}, \dots, \mathbf{w}_{\mathbf{u}m}\}$, $\mathbf{V}_{\mathbf{u}} = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{V}_{\mathbf{u}m}}$ und $(V_{\theta n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $V_{\theta n} := \text{span}\{w_{\theta 1}, \dots, w_{\theta n}\}$, $V_{\theta} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\theta n}}$ die zugehörigen Galerkin-Schemata. Darüberhinaus seien $(\mathbf{u}_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ und $(\mathbf{u}_{1m})_{m \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ bzw. $(\theta_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V_{θ} mit

$$(5.19) \quad \mathbf{u}_{0m} \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}m} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{u}_{0m} \rightarrow \mathbf{u}_0 \text{ in } \mathbf{V}_{\mathbf{u}} \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

$$(5.20) \quad \mathbf{u}_{1m} \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}m} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{u}_{1m} \rightarrow \mathbf{u}_1 \text{ in } \mathbf{H}_{\mathbf{u}} \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

$$(5.21) \quad \theta_{0n} \in V_{\theta n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_{0n} \rightarrow \theta_0 \text{ in } V_{\theta} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Wir suchen Galerkin-Lösungen $\mathbf{u}_m :]0, T[\rightarrow \mathbf{V}_{\mathbf{u}m}$ und $\theta_n :]0, T[\rightarrow V_{\theta n}$ der Form

$$(5.22) \quad \mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^m \zeta_{umj}(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}j} \quad \text{bzw.} \quad \theta_n(t) = \sum_{j=1}^n \zeta_{\theta nj}(t) w_{\theta j}$$

als Lösung der Galerkin-Gleichungen

$$(5.23)$$

$$\begin{aligned} & (\rho_0 \mathbf{u}_m''(t), \mathbf{w}_{\mathbf{u}j})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}m}} + \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_m(t), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}m}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}m}} + 3 \int_{\Omega} K_{\alpha} (\theta_n(t) - \theta_0) \text{div}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}j}) \, dx + \\ & + \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \text{div}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}j}) \, dx = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_{\mathbf{u}j})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}m}}, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$(5.24) \quad \begin{aligned} & (\rho_0 c_e \theta_n'(t), w_{\theta i})_{H_{\theta n}} + \langle \mathbf{A}_{\theta} \theta_n(t), w_{\theta i} \rangle_{V_{\theta n}^* V_{\theta n}} = 3 \int_{\Omega} K_{\alpha} \theta_0 \text{div}(\mathbf{u}_m'(t)) w_{\theta i} \, dx + \\ & + (\delta \theta_{\Gamma}(t), w_{\theta i})_{K_{\theta n}} + \int_{\Omega} \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i p_i'(t) w_{\theta i} \, dx + (r(t), w_{\theta i})_{H_{\theta n}}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

sowie den Anfangsbedingungen

$$(5.25) \quad \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}, \quad \mathbf{u}_m'(0) = \mathbf{u}_{1m}, \quad \theta_n(0) = \theta_{0n}.$$

Wegen der Invertierbarkeit der Gramschen Matrizen $\mathbf{G}_{\mathbf{u}m} := ((\mathbf{w}_{\mathbf{u}i}, \mathbf{w}_{\mathbf{u}j})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}m}})_{i,j=1,\dots,m}$ und $\mathbf{G}_{\theta n} := ((w_{\theta i}, w_{\theta j})_{H_{\theta n}})_{i,j=1,\dots,n}$ erhalten wir nach Einsetzen der Basisdarstellung (5.22) in (5.23) – (5.25) eine Anfangswertaufgabe für ein lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Koeffizientenfunktionen $\zeta_{umj} :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\zeta_{\theta nj} :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$. Aufgrund der getroffenen Voraussetzungen ist auf diese Aufgabe der Satz von Carathódory (vgl. z.B. [CL55, Fil88, Wal00, Emm04]) anwendbar und es existiert genau eine absolut-stetige Lösung $(\mathbf{u}_m, \theta_n) \in AC^1(0, T; \mathbf{V}_{\mathbf{u}m}) \times AC(0, T; V_{\theta n})$.

Zu (ii): Multiplikation der Gleichung (5.23) mit $\zeta'_{umj}(t)$ und die Summation über j von 1 bis m ergibt:

$$(5.26)$$

$$\begin{aligned} & (\rho_0 \mathbf{u}_m''(t), \mathbf{u}_m'(t))_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} + \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m'(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} + 3 \int_{\Omega} K_{\alpha} (\theta_n(t) - \theta_0) \text{div}(\mathbf{u}_m'(t)) \, dx + \\ & + \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \text{div}(\mathbf{u}_m'(t)) \, dx = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m'(t))_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}}. \end{aligned}$$

Multiplikation der Gleichungen (5.24) mit $\zeta_{\theta ni}(t)$ und die Summation über i von 1 bis n

ergibt:

(5.27)

$$\begin{aligned} & (\rho_0 c_e \theta'_n(t), \theta_n(t))_{V_\theta^* V_\theta} + \langle \mathbf{A}_\theta \theta_n(t), \theta_n(t) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} = 3 \int_\Omega K_\alpha \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}'_m(t)) \theta_n(t) dx + \\ & + \int_{\partial\Omega} \delta \theta_\Gamma(t) \theta_n(t) d\sigma + \int_\Omega \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i(t) \theta_n(t) dx + (r(t) \theta_n(t))_{H_\theta}. \end{aligned}$$

Multiplikation der Gleichung (5.26) mit θ_0 und Addition der beiden Gleichungen (5.26), (5.27) sowie die Integration von 0 bis t , $t \in]0, T[$ liefern:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \theta_0 \langle \rho_0 \mathbf{u}''_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau) \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} d\tau + \int_0^t \theta_0 \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau) \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} d\tau + \\ & + \int_0^t \langle \mathbf{A}_\theta \theta_n(\tau), \theta_n(\tau) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} d\tau + \int_0^t \langle \rho_0 c_e \theta'_n(\tau), \theta_n(\tau) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} d\tau + \\ & + \underbrace{\int_0^t \theta_0 \int_\Omega K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(\tau) \operatorname{div}(\mathbf{u}'_m(\tau)) dx d\tau}_{=: J_6} = \\ = & \underbrace{\int_0^t \int_{\partial\Omega} \delta \theta_\Gamma(\tau) \theta_n(\tau) d\sigma d\tau}_{=: J_4} + \underbrace{\int_0^t \int_\Omega \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i(\tau) \theta_n(\tau) dx d\tau}_{=: J_3} + \\ & + \underbrace{\int_0^t \theta_0 (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau))_{\mathbf{H}_u} d\tau}_{=: J_1} + \underbrace{\int_0^t (r(\tau), \theta_n(\tau))_{H_\theta} d\tau}_{=: J_2} + \\ & + \underbrace{3 \int_0^t \int_\Omega K_\alpha \theta_0^2 \operatorname{div}(\mathbf{u}'_m(\tau)) dx d\tau}_{=: J_5}. \end{aligned}$$

Es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |J_1| & \leq \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|_{\mathbf{H}_u}^2 d\tau + \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{\mathbf{H}_u}^2 d\tau, \\ |J_2| & \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|r(\tau)\|_{H_\theta}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_n(\tau)\|_{H_\theta}^2 d\tau, \\ |J_3| & \leq c_7 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_n(s)\|_{H_\theta}^2 ds. \end{aligned}$$

Die Benutzung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung sowie die Anwendung eines Spursatzes ergeben:

$$|J_4| \leq c_5 \int_0^t \|\theta_\Gamma(\tau)\|_{K_\theta}^2 d\tau + \varepsilon_1 \int_0^t \|\theta_n(\tau)\|_{V_\theta}^2 d\tau.$$

Partiellen Integration bzgl. t sowie Standardabschätzungen (Höldersche- und Youngsche Ungleichung) liefern:

$$\begin{aligned} |J_5| & = 3 \int_\Omega K_\alpha \theta_0^2 \operatorname{div}(\mathbf{u}_m(t) - \mathbf{u}_{0m}) dx \leq c_6 + \varepsilon_2 \|\mathbf{u}_m(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \varepsilon_2 \|\mathbf{u}_{0m}\|_{\mathbf{V}_u}^2, \\ |J_6| & = \int_0^t \theta_0 \int_\Omega K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p'_i(s) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m(s)) dx ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \theta_0 \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \left[\operatorname{div}(u_m(t)) - p_i(0) \operatorname{div}(u_m(0)) \right] dx \\
& \leq c_8 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds + \varepsilon_4 \|\mathbf{u}_m(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_m(0)\|_{\mathbf{V}_u}^2.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit nach partieller Integration bzgl. t und den Eigenschaften der Operatoren \mathbf{A}_u und \mathbf{A}_θ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta_0 \rho_0}{2} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{\mathbf{H}_u}^2 + \frac{c_1 \theta_0}{2} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\theta_n(t)\|_{H_\theta}^2 + (c_3 - \varepsilon_1) \int_0^t \|\theta_n(s)\|_{V_\theta}^2 ds \leq \\
& \leq c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + \frac{\theta_0 \rho_0}{2} \|\mathbf{u}_{1m}\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{c_2 \theta_0 + 1}{2} \|\mathbf{u}_{0m}\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\theta_{0n}\|_{V_\theta}^2 + \\
& + \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{\mathbf{H}_u}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|r(s)\|_{H_\theta}^2 ds + c_5 \int_0^t \|\theta_\Gamma(s)\|_{K_\theta}^2 ds + \\
& + \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}'_m(s)\|_{\mathbf{H}_u}^2 ds + \int_0^t \|\theta_n(s)\|_{H_\theta}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds.
\end{aligned}$$

Mithilfe des Gronwallschen Lemmas ergibt sich somit:

$$(5.28) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{\mathbf{H}_u} \leq c, \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{\mathbf{V}_u} \leq c,$$

$$(5.29) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\theta_n(t)\|_{H_\theta} \leq c, \quad \int_0^T \|\theta_n(t)\|_{H_\theta}^2 dt \leq c,$$

wobei c eine von n, m unabhängige generische Konstante ist. Diese Abschätzung ist für den Grenzübergang nicht ausreichend, da $\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{\mathbf{V}_u} \leq c$ für den Grenzübergang im Divergenzterm der Wärmeleitungsgleichung benötigt wird (vgl. (5.27)).

Daher differenzieren wir die Galerkin-Gleichungen nach der Zeit, um eine zusätzliche Regularität der Lösung bzgl. der Zeit zu erhalten. Das Differenzieren der Galerkin-Gleichungen ist deswegen gerechtfertigt, weil die eindeutige Lösung $(\mathbf{u}'_m, \theta_n)$ des gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung nach dem Satz von Carathéodory absolut-stetig und somit im verallgemeinerten Sinne differenzierbar auf $[0, T]$ ist. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist damit die rechte Seite des Differentialgleichungssystems im verallgemeinerten Sinne auf $[0, T]$ differenzierbar. Somit muss also auch die Zeitableitung der Lösung im verallgemeinerten Sinne auf $[0, T]$ differenzierbar sein.

Es seien $(\mathbf{u}_{1m})_{m \in \mathbb{N}}$ und $(\mathbf{u}_{2m})_{m \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbf{V}_u sowie $(\theta_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V_θ mit den Eigenschaften:

$$(5.30) \quad \mathbf{u}_{1m} \in \mathbf{V}_{um} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{u}_{1m} \rightarrow \mathbf{u}_1 \text{ in } \mathbf{V}_u \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

$$(5.31) \quad \mathbf{u}_{2m} \in \mathbf{V}_{um} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{u}_{2m} \rightarrow \mathbf{u}_2 \text{ in } \mathbf{H}_u \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

$$(5.32) \quad \theta_{1n} \in V_{\theta n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_{1n} \rightarrow \theta_1 \text{ in } V_\theta \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Jetzt differenzieren wir die Gleichung (5.23) nach t , multiplizieren die Gleichung mit $\zeta''_{umj}(t)$ und summieren über j von 1 bis m :

$$\begin{aligned}
& (\rho_0 \mathbf{u}'''_m(t), \mathbf{u}''_m(t))_{\mathbf{H}_u} + \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}''_m(t) \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} + (3K_\alpha \theta'_n(t), \operatorname{div}(\mathbf{u}''_m(t)))_{\mathbf{H}_u} + \\
(5.33) \quad & + \left(K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho \theta_0} - 1 \right) \gamma_i(t), \operatorname{div}(\mathbf{u}''_m(t)) \right)_{\mathbf{H}_u} = (\mathbf{f}'(t), \mathbf{u}''_m(t))_{\mathbf{H}_u}.
\end{aligned}$$

Analog liefert die Differentiation der Gleichung (5.24) nach t , Multiplikation der Gleichung mit $\zeta'_{\theta n i}(t)$ und die Summation über i von 1 bis n :

$$(5.34) \quad \begin{aligned} & (\rho_0 c_e \theta_n''(t), \theta_n'(t))_{H_\theta} + \langle \mathbf{A}_\theta \theta_n'(t), \theta_n'(t) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} = (3 K_\alpha \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}_m''(t)), \theta_n'(t))_{H_\theta} + \\ & + (r'(t), \theta_n'(t))_{H_\theta} + \left(\rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i'(t), \theta_n'(t) \right)_{H_\theta} + (\delta \theta_\Gamma'(t), \theta_n'(t))_{K_\theta}. \end{aligned}$$

Die Gleichung (5.33) wird zunächst mit θ_0 multipliziert und dann werden die Gleichungen (5.33) und (5.34) analog zum vorherigen Fall addiert. Es ist zu bemerken, dass sich aufgrund dieser Vorgehensweise die kritischen Kopplungsterme auslöschten. Es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |J'_1| & \leq \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{f}'(\tau)\|_{\mathbf{H}_u}^2 d\tau + \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m''(\tau)\|_{\mathbf{H}_u}^2 d\tau, \\ |J'_2| & \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|r'(\tau)\|_{H_\theta}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_n'(\tau)\|_{H_\theta}^2 d\tau, \\ |J'_3| & = \int_0^t \rho_0 \int_\Omega \sum_{i=2}^N L_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \theta}(s) \theta_n'(s) + \frac{\partial \gamma_i}{\partial p_i}(s) \gamma_i(s) \right) \theta_n'(s) dx ds \leq \\ & \leq c_8 + c_9 \int_0^t \|\theta_n'(s)\|_{H_\theta}^2 ds. \end{aligned}$$

Die Standardabschätzungen liefern unter Verwendung eines Spursatzes:

$$|J'_4| \leq \underbrace{\frac{c^2 \delta}{4\varepsilon}}_{=: c_4} \int_0^t \|\theta_\Gamma'(\tau)\|_{K_\theta}^2 d\tau + \varepsilon \int_0^t \|\theta_n'(\tau)\|_{V_\theta}^2 d\tau.$$

Die partieller Integration bzgl. der Zeit sowie die Anwendung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung liefert:

$$\begin{aligned} |J'_6| & = - \int_0^t \theta_0 \int_\Omega K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \theta}(s) \theta_n'(s) + \frac{\partial \gamma_i}{\partial p_i}(s) \gamma_i(s) \right) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m'(s)) dx ds + \\ & + \theta_0 \int_\Omega K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) \left[\gamma_i(t) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m'(t)) - \gamma_i(0) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m'(0)) \right] dx \\ & \leq c_{12,13} + c_{10} \int_0^t \|\theta_n'(s)\|_{H_\theta}^2 ds + c_{11} \int_0^t \|\mathbf{u}_m'(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds + \varepsilon_4 \|\mathbf{u}_m'(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_m'(0)\|_{\mathbf{V}_u}^2. \end{aligned}$$

Somit gelangen wir mithilfe der Gronwallschen Ungleichung zu den folgenden A-priori-Abschätzungen (vgl. vorherige Argumentation)

$$(5.35) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_m''(t)\|_{\mathbf{H}_u} \leq c, \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_m'(t)\|_{\mathbf{V}_u} \leq c,$$

$$(5.36) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\theta_n'(t)\|_{H_\theta} \leq c, \quad \int_0^T \|\theta_n'(t)\|_{H_\theta}^2 dt \leq c,$$

wobei c eine von n, m unabhängige generische Konstante ist. Diese A-priori-Abschätzungen sind für den Grenzübergang ausreichend.

Zu (iii): Nach dem Satz von Eberlein-Schmulyan bzw. Banach-Alaoglu (vgl. z.B. [Wer05]) liefern die A-priori-Abschätzungen (5.28), (5.29) und (5.35), (5.36) die Existenz einer Teilfolge

von $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sowie die Existenz einer Teilfolge von $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – diese seien ebenfalls mit $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ bzw. mit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet – mit:

$$(5.37) \quad \mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ in } \mathcal{V}_{\mathbf{u}} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_m \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \text{ in } L^\infty(0, T; \mathbf{V}_{\mathbf{u}}),$$

$$(5.38) \quad \mathbf{u}'_m \rightharpoonup \mathbf{w}' \text{ in } \mathcal{V}_{\mathbf{u}} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{w}' \text{ in } L^\infty(0, T; \mathbf{V}_{\mathbf{u}}),$$

$$(5.39) \quad \theta_n \rightharpoonup \theta \text{ in } \mathcal{V}_\theta \quad \text{und} \quad \theta_n \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \text{ in } L^\infty(0, T; H_\theta).$$

(Es kann nur \mathbf{u}' der schwach*-Grenzwert von $(\mathbf{u}'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sein, vgl. [Zei90a].) Weiterhin folgt aufgrund der schwachen Unterhalbstetigkeit der Normen:

$$(5.40) \quad \|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}_{\mathbf{u}})} + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{V}_{\mathbf{u}})} + \|\theta\|_{L^\infty(0, T; H_\theta)} + \|\theta\|_{\mathcal{V}_\theta} < \infty,$$

$$(5.41) \quad \|\mathbf{u}''\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}_{\mathbf{u}})} + \|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{V}_{\mathbf{u}})} + \|\theta'\|_{L^\infty(0, T; H_\theta)} + \|\theta'\|_{\mathcal{V}_\theta} < \infty.$$

Es ist zu zeigen: (\mathbf{u}, θ) ist Lösung des Originalproblems.

Seien $\varphi_u, \varphi_\theta \in C^1([0, T])$ beliebige Funktionen mit $\varphi_u(T) = 0$ bzw. $\varphi_\theta(T) = 0$. Die Multiplikation der Gleichung (5.23) mit φ_u und die Multiplikation der Gleichung (5.24) mit φ_θ sowie Integration über $[0, T]$ liefert für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\rho_0 \mathbf{u}''_m(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_m(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k} \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} dt + \\ & + 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_\alpha (\theta_n(t) - \theta_0) \operatorname{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \operatorname{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}} dt, \\ & \int_0^T (\rho_0 c_e \theta'_n(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j})_{H_\theta} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_\theta \theta_n(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j} \rangle_{V_\theta^* V_\theta} dt = \\ & = 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_\alpha \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}'_m(t)) \varphi_\theta(t) w_{\theta j} dx dt + \int_0^T (r(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j})_{H_\theta} dt + \\ & + \int_0^T (\delta \theta_\Gamma, \varphi_\theta(t) w_{\theta j})_{K_\theta} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i(t) \varphi_\theta(t) w_{\theta j} dx dt. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert:

$$(5.42) \quad \int_0^T (\rho_0 \mathbf{u}''_m(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}} dt = - \int_0^T (\rho_0 \mathbf{u}'_m(t), \varphi'_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}} dt + \\ - (\rho_0 \mathbf{u}'_m(0), \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}}$$

sowie

$$(5.43) \quad \int_0^T (\rho_0 c_e \theta'_n(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j})_{H_\theta} dt = - \int_0^T (\rho_0 c_e \theta_n(t), \varphi'_\theta(t) w_{\theta j})_{H_\theta} dt + \\ - (\rho_0 c_e \theta_n(0), \varphi_\theta(0) w_{\theta j})_{H_\theta}.$$

Wegen der schwach*-Konvergenz – man beachte die Linearität und Stetigkeit der Operatoren $\mathbf{A}_{\mathbf{u}}, \mathbf{A}_\theta, \varepsilon, \operatorname{div}$ – ist der Grenzübergang für $n, m \rightarrow \infty$ möglich und liefert:

$$- \int_0^T (\rho_0 \mathbf{u}'(t), \varphi'_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}} dt - (\rho_0 \mathbf{u}'(0), \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} dt + 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha} (\theta(t) - \theta_0) \operatorname{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \operatorname{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (\rho_0 c_e \theta(t), \varphi'_{\theta}(t) w_{\theta j})_{H_{\theta}} dt - (\rho_0 c_e \theta(0), \varphi_{\theta}(0) w_{\theta j})_{H_{\theta}} + \\
& + \int_0^T \langle \mathbf{A}_{\theta} \theta(t), \varphi_{\theta}(t) w_{\theta j} \rangle_{\mathbf{V}_{\theta}^* \mathbf{V}_{\theta}} dt = 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha} \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}'(t)) \varphi_{\theta}(t) w_{\theta j} dx dt + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i(t) \varphi_{\theta}(t) w_{\theta j} dx dt + \int_0^T (\delta \theta_{\Gamma}(t), \varphi_{\theta}(t) w_{\theta j})_{K_{\theta}} dt + \\
& + \int_0^T (r(t), \varphi_{\theta}(t) w_{\theta j})_{H_{\theta}} dt.
\end{aligned}$$

Die lineare Hülle der Funktionen $\mathbf{w}_{\mathbf{u}k}$ ist dicht in \mathbf{V}_u und die lineare Hülle der Funktionen $w_{\theta j}$ ist dicht in \mathbf{V}_{θ} . Die Funktionen $\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}$ und $\varphi_{\theta}(t) w_{\theta k}$ sind dicht in \mathbf{V}_u bzw. in \mathbf{V}_{θ} und somit zulässige Testfunktionen (vgl. [Nau05]).

Nun bleibt für die Existenz der Lösung nur noch zu zeigen: $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_1$ und $\theta(0) = \theta_0$. Es gelten die beiden Formeln der partiellen Integration:

$$\int_0^T (\mathbf{u}'_m(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt = - \int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \varphi'_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt + (\mathbf{u}_{0m}, \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u}$$

für $k = 1, \dots, m$ sowie

$$\int_0^T (\mathbf{u}'(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt = - \int_0^T (\mathbf{u}(t), \varphi'_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt + (\mathbf{u}(0), \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Der schwach*-Grenzübergang ist für $m \rightarrow \infty$ zulässig und damit ergibt sich:

$$(\mathbf{u}_{0m}, \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (\mathbf{u}(0), \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Dichtheitsargument folgt $\mathbf{u}_{0m} \rightarrow \mathbf{u}(0)$ für $m \rightarrow \infty$ in \mathbf{H}_u . Wegen $\mathbf{u}_{0m} \rightarrow \mathbf{u}_0$ für $m \rightarrow \infty$ in \mathbf{V}_u folgt $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.

Analog gelten die beiden Formeln der partiellen Integration:

$$\int_0^T (\mathbf{u}''_m(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt = - \int_0^T (\mathbf{u}'_m(t), \varphi'_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt + (\mathbf{u}_{1m}, \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u}$$

für $k = 1, \dots, m$ sowie

$$\int_0^T (\mathbf{u}''(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt = - \int_0^T (\mathbf{u}'(t), \varphi'_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt + (\mathbf{u}'(0), \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Der schwach*-Grenzübergang ist für $m \rightarrow \infty$ zulässig und damit ergibt sich:

$$(\mathbf{u}_{1m}, \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (\mathbf{u}'(0), \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Dichtheitsargument folgt $\mathbf{u}_{1m} \rightarrow \mathbf{u}'(0)$ für $m \rightarrow \infty$ in \mathbf{H}_u . Wegen $\mathbf{u}_{1m} \rightarrow \mathbf{u}_1$ für $m \rightarrow \infty$ in \mathbf{V}_u folgt $\mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_1$.

Es gelten die beiden Formeln der partiellen Integration:

$$\int_0^T (\theta'_n(t), \varphi_{\theta}(t) w_{\theta k})_{H_{\theta}} dt = - \int_0^T (\theta_n(t), \varphi'_{\theta}(t) w_{\theta k})_{H_{\theta}} dt + (\theta_{0n}, \varphi_{\theta}(0) w_{\theta k})_{H_{\theta}}$$

für $k = 1, \dots, m$ sowie

$$\int_0^T (\theta'(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta k})_{H_\theta} dt = - \int_0^T (\theta(t), \varphi'_\theta(t) w_{\theta k})_{H_\theta} dt + (\theta(0), \varphi_\theta(0) w_{\theta k})_{H_\theta}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Der schwach*-Grenzübergang ist für $n \rightarrow \infty$ zulässig und damit ergibt sich:

$$(\theta_{0n}, \varphi_\theta(0) w_{\theta k})_{H_\theta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\theta(0), \varphi_\theta(0) w_{\theta k})_{H_\theta} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Dichtheitsargument folgt $\theta_{0n} \rightarrow \theta(0)$ für $n \rightarrow \infty$ in H_θ . Wegen $\theta_{0n} \rightarrow \theta_0$ für $n \rightarrow \infty$ in V_θ folgt $\theta(0) = \theta_0$.

Somit ist (\mathbf{u}, θ) schwache Lösung des Originalproblems mit den angegebenen Eigenschaften. Wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit der Normen gilt zudem die Beschränktheit der Lösung in den entsprechenden Räumen.

Zu (iv): Seien (\mathbf{u}_1, θ_1) sowie (\mathbf{u}_2, θ_2) zwei verschiedene Lösungen des Ausgangsproblems. Seien $\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ und $\theta := \theta_1 - \theta_2$ gegeben. Dann gelten aufgrund der Linearität $\mathbf{u}(0) = 0$, $\mathbf{u}'(0) = 0$ und

$$(5.44) \quad \int_0^T (\rho_0 \mathbf{u}''(t), \mathbf{v}(t))_{\mathbf{V}_\mathbf{u}^* \mathbf{V}_\mathbf{u}} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_\mathbf{u} \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \rangle_{\mathbf{V}_\mathbf{u}^* \mathbf{V}_\mathbf{u}} dt + \\ + 3 \int_0^T \int_\Omega K_\alpha \theta(t) \operatorname{div}(\mathbf{v}(t)) dx dt = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\mathbf{u}$. Analog gelten $\theta(0) = 0$ sowie

$$(5.45) \quad \int_0^T (\rho_0 c_e \theta(t), w(t))_{V_\theta^* V_\theta} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_\theta \theta(t), w(t) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} dt = \\ = 3 \int_0^T \int_\Omega K_\alpha \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}'(t)) w(t) dx dt$$

für alle $w \in V_\theta$.

Testen der Gleichung (5.44) mit $\mathbf{v}(t) = \chi_{[0, \vartheta]} \mathbf{u}'(t)$ und der Gleichung (5.45) mit $w(t) = \chi_{[0, \vartheta]} \theta(t)$ für fast alle $t \in [0, T]$ sowie Multiplikation der Gleichung (5.44) mit θ_0 und Addition der beiden Gleichungen liefert:

$$(5.46) \quad \rho_0 \theta_0 \int_0^\vartheta (\mathbf{u}''(t), \mathbf{u}'(t))_{\mathbf{V}_\mathbf{u}^* \mathbf{V}_\mathbf{u}} dt + \theta_0 \int_0^\vartheta \langle \mathbf{A}_\mathbf{u} \mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t) \rangle_{\mathbf{V}_\mathbf{u}^* \mathbf{V}_\mathbf{u}} dt + \\ + \rho_0 c_e \int_0^\vartheta (\theta(t), \theta(t))_{V_\theta^* V_\theta} dt + \int_0^\vartheta \langle \mathbf{A}_\theta \theta(t), \theta(t) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} dt = 0.$$

Die A-priori-Abschätzungen liefern insgesamt:

$$\frac{\theta_0 \rho_0}{2} \|\mathbf{u}'(\vartheta)\|_{\mathbf{H}_\mathbf{u}}^2 + \left(\frac{c_1 \theta_0}{2} - \varepsilon_2 \right) \|\mathbf{u}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_\mathbf{u}}^2 + \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\theta(\vartheta)\|_{H_\theta}^2 + c_3 \int_0^\vartheta \|\theta(s)\|_{V_\theta}^2 ds \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^\vartheta \|\theta(s)\|_{H_\theta}^2 ds + (c_{14} + c_{15}) \int_0^\vartheta \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_\mathbf{u}}^2 ds.$$

Damit folgt:

$$(5.47) \quad \|\mathbf{u}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_\mathbf{u}}^2 + \|\theta(\vartheta)\|_{H_\theta}^2 \leq C \int_0^\vartheta [\|\theta(s)\|_{H_\theta}^2 + \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_\mathbf{u}}^2] ds,$$

wobei $C \geq 0$ eine geeignet gewählte Konstante ist. Nach dem Lemma von Gronwall folgt letztlich:

$$(5.48) \quad \|\mathbf{u}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_\mathbf{u}}^2 + \|\theta(\vartheta)\|_{H_\theta}^2 = 0 \text{ fast überall auf } [0, T].$$

Daraus folgen $\mathbf{u} = 0$ und $\theta = 0$ fast überall auf $[0, T]$. □

Bemerkung 5.11 Der Beweis der Eindeutigkeit der schwachen Lösung im Sinne des Satzes 5.10 ist vergleichsweise kompliziert. Entweder man fordert von einer Lösung eine bessere Regularität oder man stellt höhere Regularitätsforderungen an die rechten Seiten \mathbf{f} und r , die Funktion θ_Γ sowie die Anfangsbedingungen \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 und θ_0 , um so mithilfe des Differenzieren der Galerkin-Gleichungen eine bessere Regularität der Lösung zu bekommen. Unter der Voraussetzung, dass die rechten Seiten \mathbf{f} und r , die Funktion θ_Γ sowie die Anfangsbedingungen \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 und θ_0 eine bessere Regularität besitzen, lässt sich die Eindeutigkeit nachweisen.

In der Arbeit von [Gaw86] wird der Beweis der Existenz, der Eindeutigkeit und zusätzlicher Regularität schwacher Lösungen der Anfangswert-Randwert-Aufgabe für Gleichungen der N-dimensionalen linearen Thermomikroelastizität, die ein homogenes, isotropes Medium beschreiben, erbracht. Der Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung basiert auf dem Galerkin-Verfahren in geeigneten Sobolevräumen und setzt Nullrandbedingungen sowie konstante Koeffizienten voraus.

Im Folgenden soll auf einfachere Randbedingungen für unsere Aufgabe eingegangen werden. Anstatt der gemischten Randbedingung (3.11), (3.12) betrachtet man nun die homogene Dirichletrandbedingung

$$(5.49) \quad \mathbf{u}(x, t) = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times]0, T[.$$

Aus physikalischen Gründen ist diese Randbedingung nicht sinnvoll, da sie einen Körper beschreibt, der von allen Seiten fest eingespannt ist – rein mathematisch betrachtet ist dieser Fall dennoch sehr interessant.

Aufgrund von (5.49) gilt auch $\mathbf{u}'(x, t) = 0$ auf $\partial\Omega \times]0, T[$ und es folgt mithilfe partieller Integration bezüglich des Ortes:

$$3 \int_{\Omega} K_\alpha \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}'(\tau)) \varphi(\tau) \, dx = -3 \int_{\Omega} K_\alpha \theta_0 \mathbf{u}'(\tau) \nabla \varphi(\tau) \, dx$$

sowie

$$-3 \int_{\Omega} K_\alpha \theta_0 (\theta(t) - \theta_0) \operatorname{div}(\mathbf{u}'(t)) \, dx = 3 \int_{\Omega} \operatorname{grad}(K_\alpha \theta_0 \theta(t)) \mathbf{u}'(t) \, dx.$$

Für konstante Koeffizienten stellt man fest, dass sich somit die kritischen Kopplungsterme komplett aufheben. Dadurch entfällt die, bei der hier verfolgten Beweisstrategie, Notwendigkeit, die Galerkin-Gleichungen zu differenzieren und eine höhere Regularität von den rechten Seiten \mathbf{f} und r von der Funktion θ_Γ sowie von den Anfangsbedingungen \mathbf{u}_0 und θ_0 zu fordern. Im Gegensatz zum Satz 5.10 ist $\mathbf{u}' \in \mathcal{H}_u$ nun für den Grenzübergang in den Kopplungstermen ausreichend. Eine bessere Regularität wie im Fall gemischter Randbedingungen zuvor wird deshalb nicht benötigt, da durch die partielle Integration bezüglich des Ortes im Kopplungsterm der Wärmeleitungsgleichung \mathbf{u}' nicht mehr im Divergenzterm auftritt und somit keine Schwierigkeit für den Grenzübergang darstellt.

Als Fazit lässt sich festhalten, dass es im Fall vereinfachter Randbedingungen unter der Voraussetzung konstanter Koeffizienten jedoch geringeren Regularitätsforderungen als im Fall gemischter Randbedingungen gelingt, die Existenz einer schwachen Lösung der Aufgabe der linearen Thermoelastizität nachzuweisen. Der Beweis der Eindeutigkeit benötigt, bei der hier verfolgten Beweisstrategie, allerdings dieselben Regularitätsvoraussetzungen wie im allgemeinen Fall.

5.2.2 Betrachtung des Gesamtproblems

Existenz der Lösung

Beweis. Seien $\mathbf{V} := \mathbf{V}_u \times V_\theta$ und $\mathbf{H} := \mathbf{H}_u \times H_\theta$. Angenommen es sei $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H})$. Wir haben bereits gezeigt:

- (i) Zu gegebenem $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H})$ existiert eine eindeutige Lösung $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_p$ des Anfangswertproblems (4.32), (3.4).
- (ii) Zu diesem gegebenem $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_p$ existiert eine eindeutige schwache Lösung $(\mathbf{u}, \theta) \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ des Problems (4.21), (4.22), (3.8) – (3.13) mit folgenden Abschätzungen:

$$(5.50) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}_u} &\leq c_1 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{V}_u)} \leq c_2 \\ \|\theta\|_{V_\theta} &\leq c_3 \\ \|\mathbf{u}'\|_{\mathcal{V}_u^*} &\leq c_4 \|\mathbf{u}'\|_{\mathcal{V}_u} \leq c_4 c_5 \|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{V}_u)} \leq c_6 \\ \|\theta'\|_{V_\theta^*} &\leq c_7 \|\theta'\|_{V_\theta} \leq c_8 \end{aligned}$$

wobei c_i ($i = 1, \dots, 8$) positive Konstanten.

Anwendung des Fixpunktprinzips: Damit ist ein Operator

$$\mathbf{T} : L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V}) \subset L^2(0, T; \mathbf{H}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) =: (\mathbf{u}, \theta)$$

definiert. Wir wollen nun zeigen, dass dieser mindestens einen Fixpunkt $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H})$ mit $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}) = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta})$ besitzt. Dazu ist hinreichend zu zeigen, dass es ein $R > 0$ derart gibt, dass

$$(5.51) \quad \mathbf{T} : \overline{B_R(0)} \subset L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow \overline{B_R(0)} \quad \text{stetig und kompakt ist.}$$

Wir beweisen nun der Reihe nach:

(i) Selbstabbildung

Behauptung:

$$(5.52) \quad \exists R > 0 \quad \mathbf{T} : \overline{B_R(0)} \subset L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow \overline{B_R(0)}.$$

Sei $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \in \overline{B_R(0)}$. Dann gilt für $(\mathbf{u}, \theta) := \mathbf{T}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta})$ aufgrund der A-priori-Abschätzungen:

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{u}, \theta)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} + \|(\mathbf{u}', \theta')\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}^*)} \leq \tilde{c}_1 \\ \implies &\|(\mathbf{u}, \theta)\|_{W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{H})} \leq \tilde{c}_1 \\ \implies &\|(\mathbf{u}, \theta)\|_{C(0, T; \mathbf{H})} \leq \tilde{c}_2 \|(\mathbf{u}, \theta)\|_{W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{H})} \leq \tilde{c}_1 \tilde{c}_2 \\ \implies &\|(\mathbf{u}, \theta)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \tilde{c}_3 \|(\mathbf{u}, \theta)\|_{C(0, T; \mathbf{H})} \leq \tilde{c}_2 \tilde{c}_3 \|(\mathbf{u}, \theta)\|_{W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{H})} \leq \tilde{c}_1 \tilde{c}_2 \tilde{c}_3 \\ \implies &\|(\mathbf{u}, \theta)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \tilde{c}_1 \tilde{c}_2 \tilde{c}_3 =: R < \infty \end{aligned}$$

mit \tilde{c}_i ($i = 1, 2, 3$) positive Konstanten. \mathbf{T} bildet sogar ganz $L^2(0, T; \mathbf{H})$ in $\overline{B_R(0)}$ ab.

(ii) Stetigkeit des Operators

Zu zeigen:

$$\mathbf{T} : (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \mapsto \mathbf{p} \mapsto (\mathbf{u}, \theta) \text{ ist stetig.}$$

Sei $\bar{\mathbf{u}}_n \rightarrow \bar{\mathbf{u}}$ in \mathcal{H}_u und $\bar{\theta}_n \rightarrow \bar{\theta}$ in \mathcal{H}_θ . Zu zeigen ist, dass dann auch gilt:

$$(5.53) \quad \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{in} \quad \mathcal{V}_u,$$

$$(5.54) \quad \theta_n \rightarrow \theta \quad \text{in} \quad V_\theta,$$

$$(5.55) \quad \mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p} \quad \text{in} \quad \mathcal{V}_p.$$

Sei $(\mathbf{p}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(\mathbf{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\bar{\theta}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(\bar{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da $(\bar{\theta}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H}_θ gegen $\bar{\theta}$ konvergiert, folgt nach dem Konvergenzsatz von Riesz-Fischer (vgl. [KF70, Alt02, Wer05]) die Existenz einer Teilfolge $(\bar{\theta}_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen $\bar{\theta}$ konvergiert. Mithilfe der Lipschitz-Stetigkeit von γ folgt:

$$\begin{aligned}
(5.56) \quad \|\mathbf{p}_{n_{k_l}}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{\mathbf{H}_p} &\leq \int_0^t \|\gamma(\bar{\theta}_{n_{k_l}}(s), \mathbf{p}_{n_{k_l}}(s)) - \gamma(\bar{\theta}(s), \mathbf{p}(s))\|_{\mathbf{H}_p} ds \\
&\leq \int_0^t \|\gamma(\bar{\theta}_{n_{k_l}}(s), \mathbf{p}(s)) - \gamma(\bar{\theta}(s), \mathbf{p}(s))\|_{\mathbf{H}_p} ds + \\
&\quad + \int_0^t \|\gamma(\bar{\theta}(s), \mathbf{p}_{n_{k_l}}(s)) - \gamma(\bar{\theta}(s), \mathbf{p}(s))\|_{\mathbf{H}_p} ds \\
&\leq \int_0^t L_p \underbrace{\|\bar{\theta}_{n_{k_l}}(s) - \bar{\theta}(s)\|_{H_\theta}}_{\rightarrow 0} ds + \int_0^t L_{\bar{\theta}} \|\mathbf{p}_{n_{k_l}}(s) - \mathbf{p}(s)\|_{\mathbf{H}_p} ds.
\end{aligned}$$

Mithilfe des Lemmas von Gronwall folgt $\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{p}_{n_{k_l}}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{\mathbf{H}_p} \rightarrow 0$ und damit folgt $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$ in $L^\infty(0, T; \mathbf{H}_p)$.

Desweiteren ist noch zu zeigen:

$$(5.57) \quad (\mathbf{u}_n, \theta_n) \rightarrow (\mathbf{u}, \theta) \quad \text{in} \quad L^2(0, T; \mathbf{H})$$

Sei $((\mathbf{u}_{n_k}, \theta_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $((\mathbf{u}_n, \theta_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Da $((\bar{\mathbf{u}}_{n_k}, \bar{\theta}_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^2(0, T; \mathbf{H})$ gegen $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta})$ konvergiert, folgt nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue die Existenz einer Teilfolge $((\mathbf{u}_{n_{k_l}}, \theta_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta})$ konvergiert. Betrachte die Teilfolge $((\mathbf{u}_{n_{k_l}}, \theta_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}}$. Aus den folgenden Abschätzungen für die Eindeutigkeit des Gesamtproblems (A-priori-Abschätzungen, Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz für $l \rightarrow \infty$) folgt analog mit

$$(5.58) \quad \tilde{\theta} := \theta_{n_{k_l}} - \theta,$$

$$(5.59) \quad \tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}_{n_{k_l}} - \mathbf{u},$$

$$(5.60) \quad \tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{p}_{n_{k_l}} - \mathbf{p}$$

die Konvergenz von $((\mathbf{u}_{n_{k_l}}, \theta_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}}$ in $L^2(0, T; \mathbf{V})$ und damit in $L^2(0, T; \mathbf{H})$ gegen (\mathbf{u}, θ) . Somit folgt $(\mathbf{u}_n, \theta_n) \rightarrow (\mathbf{u}, \theta)$ und damit die Stetigkeit des Operators \mathbf{T} .

(iii) **Präkompaktheit des Bildes des Operators**

Es bleibt noch zu zeigen:

$$\mathbf{T} : \overline{B_R(0)} \rightarrow \overline{B_R(0)} \text{ kompakt.}$$

Aus $\mathbf{T} : L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V}) \subset L^2(0, T; \mathbf{H})$ und $\|(\mathbf{u}, \theta)\| \leq R$ folgen, dass \mathbf{T} die abgeschlossene und nichtleere konvexe Teilmenge $\overline{B_R(0)}$ in eine Teilmenge von $\overline{B_R(0)}$ abbildet, die zu $L^2(0, T; \mathbf{V})$ gehört. Wegen der kompakten Einbettung $W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{H}) \subset L^2(0, T; \mathbf{H})$ aufgrund des Satzes von Lions-Aubin (vgl. [Sho97, Emm04]) ist diese Bildmenge in $L^2(0, T; \mathbf{H})$ präkompakt. Somit ist die Abbildung $\mathbf{T} : \overline{B_R(0)} \rightarrow \overline{B_R(0)}$ kompakt.

Damit ist der Schaudersche Fixpunktsatz auf \mathbf{T} anwendbar und somit besitzt die Aufgabe (4.21) – (4.23), (3.4), (3.8) – (3.13) unter den gegebenen Voraussetzungen mindestens eine schwache Lösung $(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathcal{V}_u \times \mathcal{V}_\theta \times \mathcal{V}_p$. \square

Eindeutigkeit der Lösung

Beweis. Seien $(\mathbf{u}_1, \theta_1, \mathbf{p}_1)$ und $(\mathbf{u}_2, \theta_2, \mathbf{p}_2)$ zwei unterschiedliche Lösungen des Originalproblems. Wir definieren: $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\tilde{\theta} := \theta_1 - \theta_2$ und $\tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$. Dann folgt für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}$ und für alle $w \in \mathcal{V}_{\theta}$:

$$(5.61) \quad \begin{aligned} & \rho_0 \int_0^T \langle \tilde{\mathbf{u}}''(t), \mathbf{v}(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} dt + 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha} \operatorname{div}(\mathbf{v}(t)) \tilde{\theta}(t) dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) \tilde{p}_i(t) \operatorname{div}(\mathbf{v}(t)) dx dt = 0, \end{aligned}$$

$$(5.62) \quad \begin{aligned} & \rho_0 c_e \int_0^T \langle \tilde{\theta}'(t), w(t) \rangle_{V_{\theta}^* V_{\theta}} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_{\theta}(\theta_1, \mathbf{p}_1) \theta_1(t) - \mathbf{A}_{\theta}(\theta_2, \mathbf{p}_2) \theta_2(t), w(t) \rangle_{V_{\theta}^* V_{\theta}} dt = \\ & = 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha} \theta_0 \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}'(t)) w(t) dx dt + \\ & + \rho_0 \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=2}^N (L_i(\theta_1(t)) \gamma_i(\theta_1(t), \mathbf{p}_1(t)) - L_i(\theta_2(t)) \gamma_i(\theta_2(t), \mathbf{p}_2(t))) w(t) dx dt \text{ sowie} \end{aligned}$$

$$(5.63) \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial t}(t) = \gamma(\theta_1(t), \mathbf{p}_1(t)) - \gamma(\theta_2(t), \mathbf{p}_2(t)), \quad t \in]0, T[.$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$(5.64) \quad \tilde{\mathbf{u}}(0) = 0, \quad \tilde{\mathbf{u}}'(0) = 0, \quad \tilde{\theta}(0) = 0 \text{ und } \tilde{\mathbf{p}}(0) = 0.$$

Testen der Gleichung (5.61) mit $\chi_{[0, \vartheta]} \tilde{\mathbf{u}}'$ und der Gleichung (5.62) mit $\chi_{[0, \vartheta]} \tilde{\theta}$ für fixiertes $\vartheta \in [0, T]$ sowie die Multiplikation der Gleichung (5.61) mit θ_0 und die Addition der beiden Gleichungen (5.61), (5.62) liefert:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\rho_0 \theta_0 \int_0^{\vartheta} \langle \tilde{\mathbf{u}}''(t), \tilde{\mathbf{u}}'(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} dt}_{=: I_1} + \underbrace{\theta_0 \int_0^{\vartheta} \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\mathbf{u}}'(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} dt}_{=: I_3} + \\ & + \underbrace{\int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} K \theta_0 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) \tilde{p}_i(t) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}'(t)) dx dt}_{=: I_6} + \\ & + \underbrace{\rho_0 c_e \int_0^{\vartheta} \langle \tilde{\theta}'(t), \tilde{\theta}(t) \rangle_{V_{\theta}^* V_{\theta}} dt}_{=: I_2} + \underbrace{\int_0^{\vartheta} \langle \mathbf{A}_{\theta}(\theta_1, \mathbf{p}_1) \theta_1(t) - \mathbf{A}_{\theta}(\theta_2, \mathbf{p}_2) \theta_2(t), \tilde{\theta}(t) \rangle_{V_{\theta}^* V_{\theta}} dt}_{=: I_4} = \\ & = \underbrace{\rho_0 \int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} \sum_{i=2}^N (L_i(\theta_1(t)) \gamma_i(\theta_1(t), \mathbf{p}_1(t)) - L_i(\theta_2(t)) \gamma_i(\theta_2(t), \mathbf{p}_2(t))) \tilde{\theta}(t) dx dt}_{=: I_5}. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (5.63) folgt aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von γ mithilfe des Lemmas von Gronwall (vgl. (5.56)):

$$(5.65) \quad \|\mathbf{p}_1(t) - \mathbf{p}_2(t)\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{p}}} \leq \exp(L_{\tilde{\theta}} \vartheta) L_{\tilde{\mathbf{p}}} \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{H_{\theta}} ds.$$

Weiter ist mittels der Hölderschen- und Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}_1(t) - \mathbf{p}_2(t)\|_{\mathbf{H}_p}^2 &\leq \left(\int_0^t \|\gamma(\theta_1(s), \mathbf{p}_1(s)) - \gamma(\theta_2(s), \mathbf{p}_2(s))\|_{\mathbf{H}_p} ds \right)^2 \\
&\leq \int_0^t ds \int_0^t \|\gamma(\theta_1(s), \mathbf{p}_1(s)) - \gamma(\theta_2(s), \mathbf{p}_2(s))\|_{\mathbf{H}_p}^2 ds \\
&\leq \vartheta \int_0^t \left(\|\gamma(\theta_1(s), \mathbf{p}_1(s)) - \gamma(\theta_1(s), \mathbf{p}_2(s))\|_{\mathbf{H}_p} + \right. \\
&\quad \left. + \|\gamma(\theta_1(s), \mathbf{p}_2(s)) - \gamma(\theta_2(s), \mathbf{p}_2(s))\|_{\mathbf{H}_p} \right)^2 ds \\
&\leq 2\vartheta \left(\int_0^t L_\theta^2 \|\mathbf{p}_1(s) - \mathbf{p}_2(s)\|_{\mathbf{H}_p}^2 ds + \int_0^t L_p^2 \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{H_\theta}^2 ds \right)
\end{aligned}$$

und somit unter Verwendung des Lemmas von Gronwall:

$$(5.66) \quad \|\mathbf{p}_1(t) - \mathbf{p}_2(t)\|_{\mathbf{H}_p}^2 \leq \underbrace{\exp(2L_\theta^2\vartheta^2)L_p^2}_{=: C_p} 2\vartheta \int_0^t \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{H_\theta}^2 ds.$$

Wegen

$$|I_1| = \frac{\rho_0 \theta_0}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}'(\vartheta)\|_{\mathbf{H}_u}^2 \quad \text{und} \quad |I_2| = \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\tilde{\theta}(\vartheta)\|_{H_\theta}^2,$$

sowie die folgenden Abschätzungen (vgl. hierzu Kapitel 5.2.1):

$$|I_3| \geq \frac{c_1 \theta_0}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2, \quad |I_4| \geq c_2 \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{V_\theta}^2 dt,$$

$$\begin{aligned}
|I_5| &\leq \rho_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \sum_{i=2}^N L_i(\theta_1(t)) (\gamma(\theta_1(t), \mathbf{p}_1(t)) - \gamma(\theta_2(t), \mathbf{p}_2(t))) \tilde{\theta}(t) dx dt + \\
&\quad + \rho_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \sum_{i=2}^N (L_i(\theta_1(t)) - L_i(\theta_2(t))) \gamma(\theta_2(t), \mathbf{p}_2(t)) \tilde{\theta}(t) dx dt \leq \\
&\leq \rho_0 \sum_{i=2}^N L_i(\theta_1(t)) \int_0^\vartheta \int_\Omega (L_p |\tilde{\theta}(t)| + L_\theta |\tilde{\mathbf{p}}(t)|) \tilde{\theta}(t) dx dt + \\
&\quad + \rho_0 \sum_{i=2}^N \|\gamma_i\|_X \int_0^\vartheta \int_\Omega L |\tilde{\theta}(t)|^2 dx dt \leq \\
&\leq c_7 \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_6| &= - \int_0^\vartheta \int_\Omega K \sum_{i=1}^N \rho_{i0} (\gamma_i(\theta_1(t), \mathbf{p}_1(t)) - \gamma_i(\theta_2(t), \mathbf{p}_2(t))) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}(t)) dx dt + \\
&\quad + \int_\Omega K \sum_{i=1}^N \rho_{i0} \tilde{\mathbf{p}}_i(\vartheta) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)) dx \leq \\
&\leq K \sum_{i=1}^N |\rho_{i0}| \int_0^\vartheta \int_\Omega (L_p |\tilde{\theta}(t)| + L_\theta |\tilde{\mathbf{p}}(t)|) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}(t)) dx dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K \sum_{i=1}^N |\rho_{i0}| \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{p}}_i(\vartheta) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)) \, dx \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^N |\rho_{i0}| \frac{L_{\mathbf{p}} K}{2} \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_{\theta}}^2 \, dt + \sum_{i=1}^N |\rho_{i0}| \frac{L_{\mathbf{p}} K}{2} \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \, dt + \\
& \quad \sum_{i=1}^N |\rho_{i0}| \frac{L_{\theta} \vartheta C_p K}{2} \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_{\theta}}^2 \, dt + \sum_{i=1}^N |\rho_{i0}| \frac{L_{\theta} K}{2} \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \, dt + \\
& \quad + \left(\sum_{i=1}^N |\rho_{i0}| \right)^2 \frac{C_p K^2}{\varepsilon_1} \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_{\theta}}^2 \, dt + \varepsilon_1 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \\
& \leq c_5 \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \, dt + \varepsilon_1 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 + c_6 \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_{\theta}}^2 \, dt
\end{aligned}$$

mit $\rho_{i0} := \frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1$. Damit gilt insgesamt für fast alle $\vartheta \in]0, T[$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_0 \theta_0}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}'(\vartheta)\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}}^2 + \left(\frac{c_1 \theta_0}{2} - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_5 \right) \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 + \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\tilde{\theta}(\vartheta)\|_{H_{\theta}}^2 + c_2 \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\theta}(t)\|_{V_{\theta}}^2 \, dt \leq \\
& \leq c_5 \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \, dt + (c_6 + c_7) \int_0^{\vartheta} \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_{\theta}}^2 \, dt.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\|\tilde{\theta}(\vartheta)\|_{H_{\theta}}^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 \leq \mathbf{C} \int_0^{\vartheta} \left[\|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 + \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_{\theta}}^2 \right] \, dt,$$

wobei

$$\mathbf{C} := \frac{\max\{c_5 + \frac{4c_{12}}{3}, c_6 + c_7 + \frac{4c_{11}}{3}\}}{\min\{\frac{c_1 \theta_0}{2} - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_5, \frac{\rho_0 c_e}{2}\}}$$

eine geeignet gewählte positive Konstante sei. Daraus folgt mithilfe der Gronwallschen Ungleichung:

$$(5.67) \quad \|\tilde{\theta}(\vartheta)\|_{H_{\theta}}^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}}^2 = 0$$

für fast alle $\vartheta \in]0, T[$. Damit ist:

$$(5.68) \quad \tilde{\mathbf{u}}(\vartheta) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{\theta}(\vartheta) = 0$$

für fast alle $\vartheta \in]0, T[$ und somit folgt ebenfalls $\tilde{p}(\vartheta) = 0$ fast überall in $]0, T[$. \square

5.3 Beweise des Satzes aus 4.4

5.3.1 Zur Teilaufgabe B

Satz 5.12 (Existenz- und Eindeigkeitssatz für die Teilaufgabe B des regularisierten Problems)
Unter den Voraussetzungen (4.1) – (4.11), (4.24), (4.25) besitzt die Aufgabe (4.30), (4.31), (3.8) – (3.13) genau eine schwache Lösung $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{V}_{\theta}$, d.h. es gelten: Gleichung (4.30) mit (4.16) in $\Omega \times]0, T[$ für alle $\varphi \in \mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ mit $\varphi' \in \mathcal{H}_{\mathbf{u}}$ und $\varphi(T) = 0$ sowie $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, Gleichung (4.31) in $\Omega \times]0, T[$ für alle $\psi \in \mathcal{V}_{\theta}$ mit $\psi' \in \mathcal{H}_{\theta}$ und $\psi(T) = 0$. Ferner gelten:

$$(5.69) \quad \mathbf{u} \in L^{\infty}(0, T; \mathbf{V}_{\mathbf{u}}), \mathbf{u}' \in L^{\infty}(0, T; \mathbf{V}_{\mathbf{u}}), \mathbf{u}'' \in L^{\infty}(0, T; \mathbf{H}_{\mathbf{u}}),$$

sowie

$$(5.70) \quad \theta \in L^{\infty}(0, T; H_{\theta}), \theta' \in L^{\infty}(0, T; H_{\theta}).$$

Im Folgenden zeigen wir den Existenz- und Eindeigkeitssatz für die *Teilaufgabe B* mithilfe des regularisierten Materialgesetzes der Umwandlungsplastizität (vgl. (4.16)).

Beweis. Der Beweis wird mithilfe des simultanes Galerkin-Verfahrens geführt und gliedert sich in drei Teile. Die einzelnen Schritte lautet wie folgt:

- (i) Existenz der Galerkin-Lösungen
- (ii) A-priori-Abschätzungen
- (iii) Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$
- (iv) Eindeutigkeit

Zu (i): Seien $(\mathbf{w}_{\mathbf{u}j})_{j \in \mathbb{N}}$ und $(w_{\theta j})_{j \in \mathbb{N}}$ Galerkin-Basen in $\mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ bzw. V_{θ} sowie $(\mathbf{V}_{\mathbf{u}m})_{m \in \mathbb{N}}$ mit $\mathbf{V}_{\mathbf{u}m} := \text{span}\{\mathbf{w}_{\mathbf{u}1}, \dots, \mathbf{w}_{\mathbf{u}m}\}$ und $(V_{\theta n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $V_{\theta n} := \text{span}\{w_{\theta 1}, \dots, w_{\theta n}\}$ die zugehörigen Galerkin-Schemata. Darüberhinaus seien $(\mathbf{u}_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ und $(\mathbf{u}_{1m})_{m \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ bzw. $(\theta_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V_{θ} mit (5.19) – (5.21). Wir suchen Galerkin-Lösungen $\mathbf{u}_m :]0, T[\rightarrow \mathbf{V}_{\mathbf{u}m}$ und $\theta_n :]0, T[\rightarrow V_{\theta n}$ der Form (5.22) als Lösung der Galerkin-Gleichungen

$$\begin{aligned}
& (\rho_0 \mathbf{u}_m''(t), \mathbf{w}_{\mathbf{u}j})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}m}} + \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_{\mathbf{u}j} \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}m}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}m}} + \\
& + 3 \int_{\Omega} K_{\alpha} (\theta_n(t) - \theta_0) \operatorname{div}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}j}) \, dx + \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \operatorname{div}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}j}) \, dx + \\
(5.71) \quad & + 2 \int_{\Omega} \mu \int_0^t a(t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_m(s)) \exp \left(\int_s^t a(\tau) \, d\tau \right) \, ds \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}j}) \, dx + \\
& - \frac{2}{3} \int_{\Omega} \mu \int_0^t a(t) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m(s)) \exp \left(\int_s^t a(\tau) \, d\tau \right) \, ds \operatorname{div}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}j}) \, dx = \\
& = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_{\mathbf{u}j})_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}m}}, \quad j = 1, \dots, m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho_0 c_e \theta_n'(t), w_{\theta i})_{H_{\theta n}} + \langle \mathbf{A}_{\theta} \theta_n(t), w_{\theta i} \rangle_{V_{\theta n}^* V_{\theta n}} = 3 \int_{\Omega} K_{\alpha} \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}_m'(t)) w_{\theta i} \, dx + \\
(5.72) \quad & + (\delta \theta_{\Gamma}(t), w_{\theta i})_{K_{\theta n}} + \int_{\Omega} \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i(t) w_{\theta i} \, dx + (r(t), w_{\theta i})_{H_{\theta n}}, \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

sowie den Anfangsbedingungen (5.25). Nach dem Einsetzen der Basisdarstellung (5.22) in (5.71), (5.71), (5.25) erhält man eine Anfangswertaufgabe für ein lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Koeffizientenfunktionen $\zeta_{umj} :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\zeta_{\theta nj} :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$. Aufgrund der getroffenen Voraussetzungen ist auf diese Aufgabe der Satz von Carathéodory anwendbar und es existiert genau eine absolut-stetige Lösung $(\mathbf{u}_m, \theta_n) \in AC^1(0, T; \mathbf{V}_{\mathbf{u}m}) \times AC(0, T; V_{\theta n})$.

Zu (ii): Multiplikation der Gleichung (5.71) mit $\zeta'_{umj}(t)$ und die Summation über j von 1 bis m ergibt:

$$\begin{aligned}
(5.73) \quad & (\rho_0 \mathbf{u}_m''(t), \mathbf{u}_m'(t))_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} + \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m'(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} + \\
& + 3 \int_{\Omega} K_{\alpha} (\theta_n(t) - \theta_0) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m'(t)) \, dx + \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m'(t)) \, dx + \\
& + 2 \int_{\Omega} \mu \int_0^t a(t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_m(s)) \exp \left(\int_s^t a(\tau) \, d\tau \right) \, ds \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_m'(t)) \, dx + \\
& - \frac{2}{3} \int_{\Omega} \mu \int_0^t a(t) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m(s)) \exp \left(\int_s^t a(\tau) \, d\tau \right) \, ds \operatorname{div}(\mathbf{u}_m'(t)) \, dx = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m'(t))_{\mathbf{H}_{\mathbf{u}}}.
\end{aligned}$$

Multiplikation der Gleichungen (5.72) mit $\zeta_{\theta ni}(t)$ und die Summation über i von 1 bis n ergibt:

(5.74)

$$\begin{aligned} & (\rho_0 c_e \theta'_n(t), \theta_n(t))_{V_\theta^* V_\theta} + \langle \mathbf{A}_\theta \theta_n(t), \theta_n(t) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} = 3 \int_{\Omega} K_\alpha \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}'_m(t)) \theta_n(t) dx + \\ & + \int_{\partial\Omega} \delta \theta_\Gamma(t) \theta_n(t) d\sigma + \int_{\Omega} \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i(t) \theta_n(t) dx + (r(t) \theta_n(t))_{H_\theta}. \end{aligned}$$

Multiplikation der Gleichung (5.73) mit θ_0 und Addition der beiden Gleichungen (5.73), (5.74) sowie die Integration von 0 bis t , $t \in [0, T]$ liefert:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \theta_0 \langle \rho_0 \mathbf{u}''_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau) \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} d\tau + \int_0^t \theta_0 \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau) \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} d\tau + \\ & + \int_0^t \langle \mathbf{A}_\theta \theta_n(\tau), \theta_n(\tau) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} d\tau + \int_0^t \langle \rho_0 c_e \theta'_n(\tau), \theta_n(\tau) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} d\tau + \\ & + \underbrace{\int_0^t \theta_0 \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(\tau) \operatorname{div}(\mathbf{u}'_m(\tau)) dx d\tau}_{=: J_6} + \\ & + \underbrace{2 \theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} \mu \int_0^\tau a(\tau) \varepsilon(\mathbf{u}_m(s)) \exp\left(\int_s^\tau a(\tau) d\tau\right) ds \varepsilon(\mathbf{u}'_m(\tau)) dx d\tau}_{=: J_7} = \\ = & \underbrace{\frac{2 \theta_0}{3} \int_0^t \int_{\Omega} \mu \int_0^\tau a(\tau) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m(s)) \exp\left(\int_s^\tau a(\tau) d\tau\right) ds \operatorname{div}(\mathbf{u}'_m(\tau)) dx d\tau}_{=: J_8} + \\ & + \underbrace{\int_0^t \int_{\partial\Omega} \delta \theta_\Gamma(\tau) \theta_n(\tau) d\sigma d\tau}_{=: J_4} + \underbrace{\int_0^t \int_{\Omega} \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i(\tau) \theta_n(\tau) dx d\tau}_{=: J_3} \\ & + \underbrace{\int_0^t \theta_0 (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau))_{\mathbf{H}_u} d\tau}_{=: J_1} + \underbrace{\int_0^t (r(\tau), \theta_n(\tau))_{H_\theta} d\tau}_{=: J_2} + \underbrace{3 \int_0^t \int_{\Omega} K_\alpha \theta_0^2 \operatorname{div}(\mathbf{u}'_m(\tau)) dx d\tau}_{=: J_5}. \end{aligned}$$

Mithilfe der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} |J_1| & \leq \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|_{\mathbf{H}_u}^2 d\tau + \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{\mathbf{H}_u}^2 d\tau, \\ |J_2| & \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|r(\tau)\|_{H_\theta}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_n(\tau)\|_{H_\theta}^2 d\tau, \\ |J_3| & \leq c_7 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_n(s)\|_{H_\theta}^2 ds. \end{aligned}$$

Mittels der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung sowie unter Anwendung eines Spursatzes ergibt sich:

$$|J_4| \leq c_5 \int_0^t \|\theta_\Gamma(\tau)\|_{K_\theta}^2 d\tau + \varepsilon_1 \int_0^t \|\theta_n(\tau)\|_{V_\theta}^2 d\tau.$$

Partielle Integration bzgl. t sowie Standardabschätzungen liefern:

$$|J_5| \leq c_6 + \varepsilon_2 \|\mathbf{u}_m(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \varepsilon_2 \|\mathbf{u}_{0m}\|_{\mathbf{V}_u}^2,$$

$$|J_6| \leq c_8 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds + \varepsilon_4 \|\mathbf{u}_m(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_m(0)\|_{\mathbf{V}_u}^2.$$

Mithilfe partieller Integration bzgl. t folgt

$$\begin{aligned} |J_7| &= -2\theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} \mu \frac{d}{ds} \left[\int_0^s b(\tau, s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) dx ds + \\ &\quad + 2\theta_0 \int_{\Omega} \mu \int_0^t b(\tau, t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) dx = \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Differentiationsregeln für Parameterintegrale sowie unter Verwendung der Definition der Funktionen a und b ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} &= -2\theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} \mu b(s, s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))^2 dx ds + \\ &\quad -2\theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} \mu \int_0^s b(\tau, s) a(s) d\tau \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) dx ds + \\ &\quad + 2\theta_0 \int_0^t \int_{\Omega} \mu b(\tau, t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) dx = \end{aligned}$$

Die Anwendung des Satzes von Fubini sowie die bekannten Standardabschätzungen (Höldersche und Youngsche Ungleichung) und die Abschätzung des Differenzenquotienten erster Ordnung durch die erste Ableitung liefern im Folgenden:

$$\begin{aligned} &\leq 2\theta_0 \mu c \|\gamma\|_{\mathbf{X}_p} \int_0^t \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))|^2 dx ds + \\ &\quad + 2\theta_0 \mu c^2 \|\gamma\|_{\mathbf{X}_p}^2 \int_0^t \int_{\Omega} \int_0^s \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) dx ds + \\ &\quad + 2\theta_0 \mu c^2 \|\gamma\|_{\mathbf{X}_p}^2 \int_{\Omega} \int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) dx \leq \\ &\leq c_{11} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds + c_{12} \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s \left[\|\mathbf{u}(\tau)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 \right] d\tau ds + \\ &\quad + \varepsilon_3 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + c_{13} \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_{\mathbf{V}_u}^2 d\tau \leq \\ &\leq c_{14} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds + \varepsilon_3 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2. \end{aligned}$$

Analog folgt mit der gleichen Argumentation für den zweiten Term der Umwandlungsplastizität:

$$|J_8| \leq c_{15} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds + \varepsilon_4 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2.$$

Insgesamt ergibt sich damit unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Operatoren \mathbf{A}_u

und \mathbf{A}_θ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta_0 \rho_0}{2} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{\mathbf{H}_u}^2 + \left(\frac{c_1 \theta_0}{2} - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 \right) \|\mathbf{u}_m(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\theta_n(t)\|_{H_\theta}^2 + \\
& + (c_3 - \varepsilon_1) \int_0^t \|\theta_n(s)\|_{V_\theta}^2 ds \leq c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + \frac{\theta_0 \rho_0}{2} \|\mathbf{u}_{1m}\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \\
& + \frac{c_2 \theta_0 + 1}{2} \|\mathbf{u}_{0m}\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\theta_{0n}\|_{V_\theta}^2 + \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{\mathbf{H}_u}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|r(s)\|_{H_\theta}^2 ds + \\
& + c_5 \int_0^t \|\theta_\Gamma(s)\|_{K_\theta}^2 ds + \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}'_m(s)\|_{\mathbf{H}_u}^2 ds + \int_0^t \|\theta_n(s)\|_{H_\theta}^2 ds + \\
& + \left(\frac{1}{2} + c_{14} + c_{15} \right) \int_0^t \|\mathbf{u}_m(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds
\end{aligned}$$

Mithilfe des Gronwallschen Lemmas ergibt sich somit:

$$(5.75) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{\mathbf{H}_u} \leq c, \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{\mathbf{V}_u} \leq c,$$

$$(5.76) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\theta_n(t)\|_{H_\theta} \leq c, \quad \int_0^T \|\theta_n(t)\|_{H_\theta}^2 dt \leq c,$$

wobei c eine von n, m unabhängige generische Konstante ist. Diese Abschätzung ist für den Grenzübergang nicht ausreichend, da $\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{\mathbf{V}_u} \leq c$ für den Grenzübergang im Kopplungsterm der Wärmeleitungsgleichung benötigt wird. Analog zum Beweis in Kap. 5.2.1 werden die Galerkin-Gleichungen nach der Zeit differenziert, um eine zusätzliche Regularität der Lösung zu erhalten.

Es seien $(\mathbf{u}_{1m})_{m \in \mathbb{N}}$ und $(\mathbf{u}_{2m})_{m \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbf{V}_u sowie $(\theta_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V_θ mit den Eigenschaften (5.30) – (5.32). Jetzt differenzieren wir die Gleichung (5.71) nach t , multiplizieren die Gleichung mit $\zeta''_{umj}(t)$ und summieren über j von 1 bis m :

$$\begin{aligned}
(5.77) \quad & (\rho_0 \mathbf{u}'''_m(t), \mathbf{u}''_m(t))_{\mathbf{H}_u} + \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}''_m(t) \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} + \\
& + (3 K_\alpha \theta'_n(t), \operatorname{div}(\mathbf{u}''_m(t)))_{\mathbf{H}_u} + \left(K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho \theta_0} - 1 \right) \gamma_i(t), \operatorname{div}(\mathbf{u}''_m(t)) \right)_{\mathbf{H}_u} + \\
& + 2 \int_\Omega \frac{d}{dt} \left[\int_0^t b(s, t) \varepsilon^*(\mathbf{u}_m(s)) ds \right] \varepsilon^*(\mathbf{u}''_m(t)) dx = (\mathbf{f}'(t), \mathbf{u}''_m(t))_{\mathbf{H}_u}
\end{aligned}$$

Analog liefert die Differentiation der Gleichung (5.72) nach t , Multiplikation der Gleichung mit $\zeta'_{\theta ni}(t)$ und die Summation über i von 1 bis n :

$$\begin{aligned}
(5.78) \quad & (\rho_0 c_e \theta''_n(t), \theta'_n(t))_{H_\theta} + \langle \mathbf{A}_\theta \theta'_n(t), \theta'_n(t) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} = (3 K_\alpha \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}''_m(t)), \theta'_n(t))_{H_\theta} + \\
& + (r'(t), \theta'_n(t))_{H_\theta} + \left(\rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma'_i(t), \theta'_n(t) \right)_{H_\theta} + (\delta \theta'_\Gamma(t), \theta'_n(t))_{K_\theta}
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass sich aufgrund dieser Vorgehensweise die kritischen Kopplungsterme auslöschten, wenn man die Gleichung (5.77) mit θ_0 multipliziert und die beiden Gleichungen (5.77) und (5.78) addiert. D.h. es gilt: $J'_5 = 0$. Es folgen weitere (Standard-)Abschätzungen.

Mithilfe der Hölderschen sowie der Youngschen Ungleichung folgt:

$$|J'_1| \leq \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{f}'(\tau)\|_{\mathbf{H}_u}^2 d\tau + \frac{\theta_0}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}''_m(\tau)\|_{\mathbf{H}_u}^2 d\tau,$$

$$\begin{aligned}
|J'_2| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|r'(\tau)\|_{H_\theta}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta'_n(\tau)\|_{H_\theta}^2 d\tau, \\
|J'_4| &\leq c_8 + c_9 \int_0^t \|\theta'_n(s)\|_{H_\theta}^2 ds.
\end{aligned}$$

Die Standardabschätzungen liefern unter Verwendung eines Spursatzes:

$$|J'_3| \leq c_4 \int_0^t \|\theta'_\Gamma(\tau)\|_{K_\theta}^2 d\tau + \varepsilon \int_0^t \|\theta'_n(\tau)\|_{V_\theta}^2 d\tau.$$

Partielle Integration bzgl. t sowie die Anwendung der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung liefert:

$$\begin{aligned}
|J'_6| &\leq c_{12,13} + c_{10} \int_0^t \|\theta'_n(s)\|_{H_\theta}^2 ds + c_{11} \int_0^t \|\mathbf{u}'_m(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds + \\
&\quad + \varepsilon_4 \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}'_m(0)\|_{\mathbf{V}_u}^2
\end{aligned}$$

Analog zur ersten A-priori-Abschätzung folgt:

$$\begin{aligned}
|J'_7| &= 2\theta_0 \int_0^t \int_\Omega \mu \frac{d}{ds} \left[\int_0^s b(\tau, s) \varepsilon(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \varepsilon(\mathbf{u}''(s)) dx ds = \\
&= -2\theta_0 \int_0^t \int_\Omega \mu \frac{d^2}{ds^2} \left[\int_0^s b(\tau, s) \varepsilon(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \varepsilon(\mathbf{u}'(s)) dx ds + \\
&\quad + 2\theta_0 \int_\Omega \mu \frac{d}{dt} \left[\int_0^t b(\tau, t) \varepsilon(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \varepsilon(\mathbf{u}'(t)) dx = \\
&= -2\theta_0 \int_0^t \int_\Omega \mu \frac{d}{ds} \left[a(s) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) + \int_0^s \frac{db}{ds}(\tau, s) \varepsilon(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \varepsilon(\mathbf{u}'(s)) dx ds + \\
&\quad + 2\theta_0 \int_\Omega \mu \left[a(t) \varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \frac{db}{dt}(\tau, t) \varepsilon(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \varepsilon(\mathbf{u}'(t)) dx = \\
&= -2\theta_0 \int_0^t \int_\Omega \mu \left[\frac{da}{ds}(s) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) + a(s) \varepsilon(\mathbf{u}'(s)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{da}{ds}(s) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) + \int_0^s \frac{d^2b}{ds^2}(\tau, s) \varepsilon(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \varepsilon(\mathbf{u}'(s)) dx ds + \\
&\quad + 2\theta_0 \int_\Omega \mu \left[a(t) \varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \frac{db}{dt}(\tau, t) \varepsilon(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \varepsilon(\mathbf{u}'(t)) dx = \\
&= -2\theta_0 \int_0^t \int_\Omega \mu \left[2 \frac{da}{ds}(s) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) + a(s) \varepsilon(\mathbf{u}'(s)) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^s \left[a(\tau) b(\tau, s) \left[a^2(s) + \left(-\frac{da}{ds}(s) \right) \right] \right] \varepsilon(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \varepsilon(\mathbf{u}'(s)) dx ds + \\
&\quad + 2\theta_0 \int_\Omega \mu \left[a(t) \varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t b(\tau, s) (-a(s)) \varepsilon(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \right] \varepsilon(\mathbf{u}'(t)) dx \leq \\
&\leq c_4 c_1(h) \int_0^t \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u}(s))| |\varepsilon(\mathbf{u}'(s))| dx ds + c_4 c_2(h) \int_0^t \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u}(s))| |\varepsilon(\mathbf{u}'(s))| dx ds + \\
&\quad + c_3(h) \int_0^t \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u}'(s))|^2 dx ds + c_5 c_3 \int_0^t \int_\Omega \int_0^s |\varepsilon(\mathbf{u}(\tau))| d\tau |\varepsilon(\mathbf{u}'(s))| dx ds + \\
&\quad + c_6 c_3 c_1 \int_0^t \int_\Omega \int_0^s |\varepsilon(\mathbf{u}(\tau))| d\tau |\varepsilon(\mathbf{u}'(s))| dx ds + \frac{c_4 c_3}{2} \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u}(t))| |\varepsilon(\mathbf{u}'(t))| dx + \\
&\quad + c_6 c_3 c_2 \int_0^t \int_\Omega \int_0^s |\varepsilon(\mathbf{u}(\tau))| d\tau |\varepsilon(\mathbf{u}'(s))| dx ds + c_6 c_3 \int_\Omega \int_0^t |\varepsilon(\mathbf{u}(\tau))| d\tau |\varepsilon(\mathbf{u}'(t))| dx \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{c_3^2 c_4^2}{16 \varepsilon_1} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \\
&\quad + (c_1 c_4 + c_2 c_4 + c_3 c_4 + c_3 c_5 T + c_1 c_3 c_6 T + c_2 c_3 c_6 T) \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}_u}^2 d\tau + \\
&\quad + (c_1 c_4 + c_2 c_4 + c_3 c_5 T + c_1 c_3 c_6 T + c_2 c_3 c_6 T + \frac{c_3^2 c_6^2}{2 \varepsilon_2}) \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_{\mathbf{V}_u}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Dabei hängen c_1 , c_2 und c_3 von h ab! Die Abschätzung des Terms J'_8 ist vollkommen analog und somit gelangen wir mithilfe der Gronwallschen Ungleichung zu den folgenden A-priori-Abschätzungen:

$$(5.79) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_m''(t)\|_{\mathbf{H}_u} \leq c, \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_m'(t)\|_{\mathbf{V}_u} \leq c,$$

$$(5.80) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|\theta_n'(t)\|_{H_\theta} \leq c, \quad \int_0^T \|\theta_n'(t)\|_{H_\theta}^2 dt \leq c,$$

wobei c eine von n , m unabhängige generische Konstante ist. Diese A-priori-Abschätzung hängt allerdings vom Regularisierungsparameter h ab, d.h. für alle $h > 0$ erhalten wir die Existenz einer schwachen Lösung im regularisierten Sinne.

Zu (iii): Die A-priori-Abschätzungen (5.75), (5.76) und (5.79), (5.80) liefern die Existenz einer Teilfolge von $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sowie die Existenz einer Teilfolge von $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – diese seien ebenfalls mit $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ bzw. mit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet – mit (5.37) – (5.39). Weiterhin folgen (5.40) und (5.41) aufgrund der schwachen Unterhalbstetigkeit der Normen.

Es ist zu zeigen: (u, θ) ist Lösung des Originalproblems.

Seien $\varphi_u, \varphi_\theta \in C^1([0, T])$ beliebige Funktionen mit $\varphi_u(T) = 0$ bzw. $\varphi_\theta(T) = 0$. Die Multiplikation der Gleichung (5.71) mit φ_u und die Multiplikation der Gleichung (5.72) mit φ_θ sowie Integration über $[0, T]$ liefert für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\rho_0 \mathbf{u}_m''(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}_m(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} dt + \\
&\quad + 3 \int_0^T \int_\Omega K_\alpha (\theta_n(t) - \theta_0) \operatorname{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt + \\
&\quad + \int_0^T \int_\Omega K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \operatorname{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt + \\
&\quad + 2 \int_0^T \int_\Omega \mu \int_0^t b(s, t) \varepsilon(\mathbf{u}_m(s)) ds \varepsilon(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt + \\
&\quad - \frac{2}{3} \int_0^T \int_\Omega \mu \int_0^t b(s, t) \operatorname{div}(\mathbf{u}_m(s)) ds \operatorname{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt = \\
&= \int_0^T (\mathbf{f}(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt \\
&\quad \int_0^T (\rho_0 c_e \theta_n'(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j})_{H_\theta} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_\theta \theta_n(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j} \rangle_{V_\theta^* V_\theta} dt = \\
&= 3 \int_0^T \int_\Omega K_\alpha \theta_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}_m'(t)) \varphi_\theta(t) w_{\theta j} dx dt + \int_0^T (r(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j})_{H_\theta} dt + \\
&\quad + \int_0^T (\delta \theta_\Gamma, \varphi_\theta(t) w_{\theta j})_{K_\theta} dt + \int_0^T \int_\Omega \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i(t) \varphi_\theta(t) w_{\theta j} dx dt
\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert (5.42) sowie (5.43). Wegen der schwach*-Konvergenz – man beachte die Linearität und Stetigkeit der Operatoren \mathbf{A}_u , \mathbf{A}_θ , ε , div – ist der Grenzübergang für $n, m \rightarrow \infty$ möglich und liefert:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (\rho_0 \mathbf{u}'(t), \varphi'_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt - (\rho_0 \mathbf{u}'(0), \varphi_u(0) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} + \\
& + \int_0^T \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k} \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} dt + 3 \int_0^T \int_\Omega K_\alpha (\theta(t) - \theta_0) \text{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt + \\
& + \int_0^T \int_\Omega K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) p_i(t) \text{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt + \\
& + 2 \int_0^T \int_\Omega \mu \int_0^t b(s, t) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) ds \varepsilon(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt + \\
& - \frac{2}{3} \int_0^T \int_\Omega \mu \int_0^t b(s, t) \text{div}(\mathbf{u}(s)) ds \text{div}(\varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k}) dx dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \varphi_u(t) \mathbf{w}_{\mathbf{u}k})_{\mathbf{H}_u} dt
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (\rho_0 c_e \theta(t), \varphi'_\theta(t) w_{\theta j})_{H_\theta} dt - (\rho_0 c_e \theta(0), \varphi_\theta(0) w_{\theta j})_{H_\theta} + \\
& + \int_0^T \langle \mathbf{A}_\theta \theta(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j} \rangle_{\mathbf{V}_\theta^* \mathbf{V}_\theta} dt = 3 \int_0^T \int_\Omega K_\alpha \theta_0 \text{div}(\mathbf{u}'(t)) \varphi_\theta(t) w_{\theta j} dx dt + \\
& + \int_0^T \int_\Omega \rho_0 \sum_{i=1}^N L_i \gamma_i(t) \varphi_\theta(t) w_{\theta j} dx dt + \\
& + \int_0^T (\delta \theta_\Gamma(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j})_{K_\theta} dt + \int_0^T (r(t), \varphi_\theta(t) w_{\theta j})_{H_\theta} dt.
\end{aligned}$$

Die Funktionen $\varphi_u(t) w_{uk}$ und $\varphi_\theta(t) w_{\theta k}$ sind dicht in \mathbf{V}_u bzw. in \mathcal{V}_θ und somit zulässige Testfunktionen.

Nun bleibt für die Existenz der Lösung nur noch zu zeigen: $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_1$ und $\theta(0) = \theta_0$ (vgl. hierzu Kap. 5.2.1). Dies folgt analog zum Beweis von Satz 5.10.

Zu (iv): Seien (\mathbf{u}_1, θ_1) sowie (\mathbf{u}_2, θ_2) zwei verschiedene Lösungen des Ausgangsproblems. Seien $\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ und $\theta := \theta_1 - \theta_2$ gegeben. Dann gelten $\mathbf{u}(0) = 0$, $\mathbf{u}'(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
(5.81) \quad & \int_0^T (\rho_0 \mathbf{u}''(t), \mathbf{v}(t))_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} dt + \\
& + 3 \int_0^T \int_\Omega K_\alpha \theta(t) \text{div}(\mathbf{v}(t)) dx dt + 2 \int_0^T \int_\Omega \mu \int_0^t b(s, t) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) ds \varepsilon(\mathbf{v}(t)) dx dt + \\
& - \frac{2}{3} \int_0^T \int_\Omega \mu \int_0^t b(s, t) \text{div}(\mathbf{u}(s)) ds \text{div}(\mathbf{v}(t)) dx dt = 0
\end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_u$. Analog gelten $\theta(0) = 0$ sowie

$$\begin{aligned}
(5.82) \quad & \int_0^T (\rho_0 c_e \theta(t), w(t))_{\mathbf{V}_\theta^* \mathbf{V}_\theta} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_\theta \theta(t), w(t) \rangle_{\mathbf{V}_\theta^* \mathbf{V}_\theta} dt = \\
& = 3 \int_0^T \int_\Omega K_\alpha \theta_0 \text{div}(\mathbf{u}'(t)) w(t) dx dt
\end{aligned}$$

für alle $w \in \mathcal{V}_\theta$.

Testen der Gleichung (5.81) mit $\mathbf{v}(t) = \chi_{[0, \vartheta]} \mathbf{u}'(t)$ und der Gleichung (5.82) mit $w(t) =$

$\chi_{[0,\vartheta]} \theta(t)$ für fast alle $t \in [0, T]$ sowie die Multiplikation der Gleichung (5.81) mit θ_0 und Addition der beiden Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned}
(5.83) \quad & \rho_0 \theta_0 \int_0^\vartheta (\mathbf{u}''(t), \mathbf{u}'(t))_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} dt + \theta_0 \int_0^\vartheta \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t) \rangle_{\mathbf{V}_u^* \mathbf{V}_u} dt + \\
& + \rho_0 c_e \int_0^\vartheta (\theta(t), \theta(t))_{V_\theta^* V_\theta} dt + \int_0^\vartheta \langle \mathbf{A}_\theta \theta(t), \theta(t) \rangle_{V_\theta^* V_\theta} dt + \\
& + 2 \theta_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \mu \int_0^t b(s, t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'(t)) dx dt + \\
& = \frac{2}{3} \theta_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \mu \int_0^t b(s, t) \operatorname{div}(\mathbf{u}(s)) ds \operatorname{div}(\mathbf{u}'(t)) dx dt.
\end{aligned}$$

Die A-priori-Abschätzungen liefern insgesamt für fast alle $\vartheta \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta_0 \rho_0}{2} \|\mathbf{u}'(\vartheta)\|_{\mathbf{H}_u}^2 + \left(\frac{c_1 \theta_0}{2} - \varepsilon_2 \right) \|\mathbf{u}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\theta(\vartheta)\|_{H_\theta}^2 + c_3 \int_0^\vartheta \|\theta(s)\|_{V_\theta}^2 ds \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^\vartheta \|\theta(s)\|_{H_\theta}^2 ds + (c_{14} + c_{15}) \int_0^\vartheta \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2 ds.
\end{aligned}$$

Damit folgt für fast alle $\vartheta \in [0, T]$:

$$(5.84) \quad \|\mathbf{u}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \|\theta(\vartheta)\|_{H_\theta}^2 \leq C \int_0^\vartheta [\|\theta(s)\|_{H_\theta}^2 + \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}_u}^2] ds$$

wobei $C \geq 0$ eine geeignet gewählte Konstante ist. Nach dem Lemma von Gronwall folgt letztlich:

$$(5.85) \quad \|\mathbf{u}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \|\theta(\vartheta)\|_{H_\theta}^2 = 0 \text{ fast überall auf } [0, T]$$

Daraus folgen $\mathbf{u} = 0$ und $\theta = 0$ fast überall auf $[0, T]$. □

5.3.2 Betrachtung des Gesamtproblems

Existenz der Lösung

Beweis. Seien $\mathbf{V} := \mathbf{V}_u \times V_\theta$ und $\mathbf{H} := \mathbf{H}_u \times H_\theta$. Es sei $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H})$. Wir haben bereits gezeigt:

- (i) Zu gegebenem $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H})$ existiert eine eindeutige Lösung $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_p$ des Anfangswertproblems (4.32), (3.4).
- (ii) Zu diesem gegebenem $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_p$ existiert eine eindeutige schwache Lösung $(\mathbf{u}, \theta) \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ des Problems (4.30), (4.31), (3.8) – (3.13) mit den Abschätzungen (5.50).

Anwendung des Fixpunktprinzips: Damit ist ein Operator

$$\mathbf{T} : L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V}) \subset L^2(0, T; \mathbf{H}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) =: (\mathbf{u}, \theta)$$

definiert. Wir wollen nun zeigen, dass dieser mindestens einen Fixpunkt $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H})$ besitzt. Dazu ist hinreichend zu zeigen, dass es ein $R > 0$ derart gibt, dass

$$(5.86) \quad \mathbf{T} : \overline{B_R(0)} \subset L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow \overline{B_R(0)} \text{ stetig und kompakt ist.}$$

Wir beweisen nun der Reihe nach:

(i) **Selbstabbildung**

Behauptung:

$$(5.87) \quad \exists R > 0 \quad \mathbf{T} : \overline{B_R(0)} \subset L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow \overline{B_R(0)}.$$

Sei $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \in \overline{B_R(0)}$. Dann gilt für $(\mathbf{u}, \theta) := \mathbf{T}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta})$ aufgrund der A-priori-Abschätzungen (vgl. Beweis von Satz 5.10):

$$\|(\mathbf{u}, \theta)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq R < \infty.$$

\mathbf{T} bildet sogar ganz $L^2(0, T; \mathbf{H})$ in $\overline{B_R(0)}$ ab.

(ii) **Stetigkeit des Operators**

Zu zeigen:

$$(5.88) \quad \mathbf{T} : (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \mapsto \mathbf{p} \mapsto (\mathbf{u}, \theta) \text{ ist stetig.}$$

Sei $\bar{\mathbf{u}}_n \rightarrow \bar{\mathbf{u}}$ in $L^2(0, T; \mathbf{H}_{\mathbf{u}})$ und $\bar{\theta}_n \rightarrow \bar{\theta}$ in $L^2(0, T; H_{\theta})$. Zu zeigen ist, dass dann auch (5.53) – (5.55) gilt. Sei $(\mathbf{p}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(\mathbf{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\bar{\theta}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(\bar{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da $(\bar{\theta}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^2(0, T; H_{\theta})$ gegen $\bar{\theta}$ konvergiert, folgt nach dem Konvergenzsatz von Riesz-Fischer die Existenz einer Teilfolge $(\bar{\theta}_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen $\bar{\theta}$ konvergiert. Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von γ folgt (vgl. (5.56)):

$$\|\mathbf{p}_{n_{k_l}}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{p}}} \leq \int_0^t L_{\mathbf{p}} \underbrace{\|\bar{\theta}_{n_{k_l}}(s) - \bar{\theta}(s)\|_{H_{\theta}}}_{\rightarrow 0} ds + \int_0^t L_{\bar{\theta}} \|\mathbf{p}_{n_{k_l}}(s) - \mathbf{p}(s)\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{p}}} ds.$$

Mithilfe des Lemmas von Gronwall folgt $\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{p}_{n_{k_l}}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{p}}} \rightarrow 0$ und damit folgt $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$ in $L^{\infty}(0, T; \mathbf{H}_{\mathbf{p}})$.

Noch zu zeigen:

$$(5.89) \quad (\mathbf{u}_n, \theta_n) \rightarrow (\mathbf{u}, \theta) \quad \text{in} \quad L^2(0, T; \mathbf{H})$$

Sei $((\mathbf{u}_{n_k}, \theta_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $((\mathbf{u}_n, \theta_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Da $((\bar{\mathbf{u}}_{n_k}, \bar{\theta}_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^2(0, T; \mathbf{H})$ gegen $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta})$ konvergiert, folgt nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue die Existenz einer Teilfolge $((\mathbf{u}_{n_{k_l}}, \theta_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta})$ konvergiert. Betrachte die Teilfolge $((\mathbf{u}_{n_{k_l}}, \theta_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}}$. Aus den folgenden Abschätzungen für die Eindeutigkeit des Gesamtproblems (A-priori-Abschätzungen, Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz für $l \rightarrow \infty$) folgt analog mit (5.58) – (5.60) die Konvergenz von $((\mathbf{u}_{n_{k_l}}, \theta_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}}$ in $L^2(0, T; \mathbf{V})$ und damit in $L^2(0, T; \mathbf{H})$ gegen (\mathbf{u}, θ) . Somit folgt $(\mathbf{u}_n, \theta_n) \rightarrow (\mathbf{u}, \theta)$ und damit die Stetigkeit des Operators \mathbf{T} .

(iii) **Präkompaktheit des Bildes des Operators**

Es bleibt noch zu zeigen:

$$(5.90) \quad \mathbf{T} : \overline{B_R(0)} \rightarrow \overline{B_R(0)} \text{ kompakt.}$$

Aus $\mathbf{T} : L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V}) \subset L^2(0, T; \mathbf{H})$ und $\|(\mathbf{u}, \theta)\| \leq R$ folgen, dass der Operator \mathbf{T} die abgeschlossene und nichtleere konvexe Teilmenge $\overline{B_R(0)}$ in eine Teilmenge von $\overline{B_R(0)}$ abbildet, die zu $L^2(0, T; \mathbf{V})$ gehört. Wegen der kompakten Einbettung $W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{H}) \subset L^2(0, T; \mathbf{H})$ aufgrund des Satzes von Lions-Aubin ist diese Bildmenge in $L^2(0, T; \mathbf{H})$ präkompakt. Somit ist die Abbildung $\mathbf{T} : \overline{B_R(0)} \rightarrow \overline{B_R(0)}$ kompakt.

Damit ist der Schaudersche Fixpunktsatz auf \mathbf{T} anwendbar und somit besitzt die Aufgabe (4.30) – (4.32), (3.4), (3.8) – (3.13) unter den gegebenen Voraussetzungen mindestens eine schwache Lösung $(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{p}) \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{V}_{\theta} \times \mathcal{V}_{\mathbf{p}}$. \square

Eindeutigkeit der Lösung

Beweis. Seien $(\mathbf{u}_1, \theta_1, \mathbf{p}_1)$ und $(\mathbf{u}_2, \theta_2, \mathbf{p}_2)$ zwei unterschiedliche Lösungen des Originalproblems. Wir definieren $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\tilde{\theta} := \theta_1 - \theta_2$ und $\tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$. Dann folgt für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}$ und für alle $w \in \mathcal{V}_{\theta}$:

(5.91)

$$\begin{aligned} & \rho_0 \int_0^T \langle \tilde{\mathbf{u}}''(t), \mathbf{v}(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} dt + \\ & + 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha} \operatorname{div}(\mathbf{v}(t)) \tilde{\theta}(t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} K \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) \tilde{p}_i(t) \operatorname{div}(\mathbf{v}(t)) dx dt + \\ & + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \mu \int_0^t (b_1(s, t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - b_2(s, t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))) ds \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) dx dt + \\ & - \frac{2}{3} \int_0^T \int_{\Omega} \mu \int_0^t (b_1(s, t) \operatorname{div}(\mathbf{u}_1(s)) - b_2(s, t) \operatorname{div}(\mathbf{u}_2(s))) ds \operatorname{div}(\mathbf{v}(t)) dx dt = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_0 c_e \int_0^T \langle \tilde{\theta}'(t), w(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\theta}^* \mathbf{V}_{\theta}} dt + \int_0^T \langle \mathbf{A}_{\theta}(\theta_1, \mathbf{p}_1) \theta_1(t) - \mathbf{A}_{\theta}(\theta_2, \mathbf{p}_2) \theta_2(t), w(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\theta}^* \mathbf{V}_{\theta}} dt = \\ (5.92) \quad & = 3 \int_0^T \int_{\Omega} K_{\alpha} \theta_0 \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}'(t)) w(t) dx dt + \\ & + \rho_0 \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=2}^N (L_i(\theta_1(t)) \gamma_i(\theta_1(t), \mathbf{p}_1(t)) - L_i(\theta_2(t)) \gamma_i(\theta_2(t), \mathbf{p}_2(t))) w(t) dx dt \end{aligned}$$

sowie (5.63) mit Anfangsbedingungen (5.64). Das Testen der Gleichung (5.91) mit $\chi_{[0, \vartheta]} \tilde{\mathbf{u}}'$ und der Gleichung (5.92) mit $\chi_{[0, \vartheta]} \tilde{\theta}$ für fixiertes $\vartheta \in [0, T]$ sowie die Multiplikation der Gleichung (5.91) mit θ_0 und die Addition der beiden Gleichungen (5.91), (5.92) liefern:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\rho_0 \theta_0 \int_0^{\vartheta} \langle \tilde{\mathbf{u}}''(t), \tilde{\mathbf{u}}'(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} dt}_{=: I_1} + \underbrace{\theta_0 \int_0^{\vartheta} \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\mathbf{u}}'(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\mathbf{u}}^* \mathbf{V}_{\mathbf{u}}} dt}_{=: I_2} + \\ & + \underbrace{\int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} K \theta_0 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_0}{\rho_i(\theta_0)} - 1 \right) \tilde{p}_i(t) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}'(t)) dx dt}_{=: I_6} + \\ & + 2 \theta_0 \underbrace{\int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} \mu \int_0^t (b_1(s, t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - b_2(s, t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))) ds \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}'(t)) dx dt}_{=: I_7} + \\ & - \frac{2 \theta_0}{3} \underbrace{\int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} \mu \int_0^t (b_1(s, t) \operatorname{div}(\mathbf{u}_1(s)) - b_2(s, t) \operatorname{div}(\mathbf{u}_2(s))) ds \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}'(t)) dx dt}_{=: I_8} + \\ & + \underbrace{\rho_0 c_e \int_0^{\vartheta} \langle \tilde{\theta}'(t), \tilde{\theta}(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\theta}^* \mathbf{V}_{\theta}} dt}_{=: I_3} + \underbrace{\int_0^{\vartheta} \langle \mathbf{A}_{\theta}(\theta_1, \mathbf{p}_1) \theta_1(t) - \mathbf{A}_{\theta}(\theta_2, \mathbf{p}_2) \theta_2(t), \tilde{\theta}(t) \rangle_{\mathbf{V}_{\theta}^* \mathbf{V}_{\theta}} dt}_{=: I_4} = \\ = & \underbrace{\rho_0 \int_0^{\vartheta} \int_{\Omega} \sum_{i=2}^N (L_i(\theta_1(t)) \gamma_i(\theta_1(t), \mathbf{p}_1(t)) - L_i(\theta_2(t)) \gamma_i(\theta_2(t), \mathbf{p}_2(t))) \tilde{\theta}(t) dx dt}_{=: I_5}. \end{aligned}$$

Es gelten die folgenden (Standard-)Abschätzungen (vgl. hierzu die Kap. 5.2.1, 5.2.2 und 5.3.1).

$$\begin{aligned}
\|p_1(t) - p_2(t)\|_{\mathbf{H}_p}^2 &\leq C_p \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{H_\theta}^2 ds, \\
|I_1| &= \frac{\rho_0 \theta_0}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}'(\vartheta)\|_{\mathbf{H}_u}^2, \quad |I_2| \geq \frac{c_1 \theta_0}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2, \quad |I_3| = \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\tilde{\theta}(\vartheta)\|_{H_\theta}^2, \\
|I_4| &\geq c_2 \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{V_\theta}^2 dt, \quad |I_5| \leq c_7 \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt, \\
|I_6| &\leq c_5 \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \varepsilon_1 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + c_6 \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt.
\end{aligned}$$

Es wird folgende Vorüberlegung benötigt:

$$\begin{aligned}
|b_1(s, t) - b_2(s, t)| &\leq \underbrace{\left| a_1(s) \exp\left(-\int_s^t a_1(\tau) d\tau\right) - a_2(s) \exp\left(-\int_s^t a_2(\tau) d\tau\right) \right|}_{\leq 1} \\
&\leq c_8 \|\tilde{\theta}(s)\|_{H_\theta} + c_9 \int_0^s \|\tilde{\theta}(\tau)\|_{H_\theta} d\tau.
\end{aligned}$$

Partielle Integration bzgl. t , die Anwendung des Satzes von Fubini sowie die bekannten Standardabschätzungen und die Vorüberlegung führen auf:

$$\begin{aligned}
|I_7| &= -2\theta_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \mu \frac{d}{dt} \left[\int_0^t (b_1(s, t) \varepsilon(\mathbf{u}_1(s)) - b_2(s, t) \varepsilon(\mathbf{u}_2(s))) ds \right] \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(t)) dx dt + \\
&\quad + 2\theta_0 \int_\Omega \mu \int_0^\vartheta (b_1(s, \vartheta) \varepsilon(\mathbf{u}_1(s)) - b_2(s, \vartheta) \varepsilon(\mathbf{u}_2(s))) ds \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)) dx = \\
&= -2\theta_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \mu [a_1(t) \varepsilon(\mathbf{u}_1(t)) - a_2(t) \varepsilon(\mathbf{u}_2(t))] \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(t)) dx dt + \\
&\quad - 2\theta_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \mu \int_0^t \frac{d}{dt} [b_1(s, t) \varepsilon(\mathbf{u}_1(s)) - b_2(s, t) \varepsilon(\mathbf{u}_2(s))] ds \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(t)) dx dt + \\
&\quad + 2\theta_0 \int_\Omega \mu \int_0^\vartheta (b_1(s, \vartheta) \varepsilon(\mathbf{u}_1(s)) - b_2(s, \vartheta) \varepsilon(\mathbf{u}_2(s))) ds \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)) dx = \\
&= -2\theta_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \mu [a_1(t) - a_2(t)] \varepsilon(\mathbf{u}_1(t)) \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(t)) dx dt + \\
&\quad - 2\theta_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \mu a_2(t) \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(t))^2 dx dt + \\
&\quad - 2\theta_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \mu \int_0^t \left[\frac{db_1}{dt}(s, t) - \frac{db_2}{dt}(s, t) \right] \varepsilon(\mathbf{u}_1(s)) ds \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(t)) dx dt + \\
&\quad - 2\theta_0 \int_0^\vartheta \int_\Omega \mu \int_0^t \frac{db_2}{dt}(s, t) \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(s)) ds \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(t)) dx dt + \\
&\quad + 2\theta_0 \int_\Omega \mu \int_0^\vartheta (b_1(s, \vartheta) - b_2(s, \vartheta)) \varepsilon(\mathbf{u}_1(s)) ds \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)) dx + \\
&\quad + 2\theta_0 \int_\Omega \mu \int_0^\vartheta b_2(s, \vartheta) \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(s)) ds \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)) dx \leq \\
&\leq 2\theta_0 \mu \left(\int_0^\vartheta \int_\Omega [c_8 |\tilde{\theta}(t)| + c_9 \int_0^t |\tilde{\theta}(\tau)| d\tau] \underbrace{|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_1(t))|}_{\leq c_\nabla} |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}(t))| dx dt + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\vartheta \int_\Omega \underbrace{3\mu \sum_{i=1}^N G_i^1 \|\Phi'_i\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\gamma_i\|_{L^\infty(\Omega)}}_{=: c_{10}} |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}(t))|^2 dx dt + \\
& + \int_0^\vartheta \int_\Omega \int_0^t |a_1(s) a_1(t) - a_2(s) a_2(t)| \mathbf{c}_\nabla ds |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}(t))| dx dt + \\
& + \int_0^\vartheta \int_\Omega \int_0^t |a_2(s) a_2(t)| |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}(s))| ds |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}(t))| dx dt + \\
& + \int_\Omega \int_0^\vartheta [c_8 |\tilde{\theta}(t)| + c_9 \int_0^t |\tilde{\theta}(\tau)| d\tau] \mathbf{c}_\nabla ds |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta))| dx + \\
& + \int_\Omega \int_0^\vartheta c_{10} |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}(s))| ds |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta))| dx \Big) \leq \\
& \leq 2\theta_0 \mu \left(\frac{\mathbf{c}_\nabla c_8}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \frac{\mathbf{c}_\nabla c_8}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \right. \\
& + \frac{\mathbf{c}_\nabla c_9 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \frac{\mathbf{c}_\nabla c_9 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + c_{10} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \\
& + \mathbf{c}_\nabla c_{10} \int_0^\vartheta \int_\Omega \int_0^t (|a_1(s) - a_2(s)| + |a_1(t) - a_2(t)|) ds |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}(t))| dx dt + \\
& + \frac{c_{10}^2 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \frac{c_{10}^2 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \frac{c_8^2}{4\varepsilon_2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \\
& + \varepsilon_2 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{c_9^2 \vartheta^2}{4\varepsilon_3} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \varepsilon_3 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \\
& \left. + \frac{c_{10}^2}{4\varepsilon_4} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \varepsilon_4 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 \right) \leq \\
& \leq 2\theta_0 \mu \left(\frac{\mathbf{c}_\nabla c_8}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \frac{\mathbf{c}_\nabla c_8}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \right. \\
& + \frac{\mathbf{c}_\nabla c_9 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \frac{\mathbf{c}_\nabla c_9 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + c_{10} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \\
& + 2\mathbf{c}_\nabla c_{10} \vartheta \left[\frac{c_8}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \frac{c_8}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \frac{c_9 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \right. \\
& + \left. \frac{c_9 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt \right] + \frac{c_{10}^2 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \frac{c_{10}^2 \vartheta}{2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \\
& + \frac{c_8^2}{4\varepsilon_2} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \varepsilon_2 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{c_9^2 \vartheta^2}{4\varepsilon_3} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \varepsilon_3 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \\
& \left. + \frac{c_{10}^2}{4\varepsilon_4} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \varepsilon_4 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 \right) \leq \\
& \leq c_{11} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + c_{12} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \varepsilon_5 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2.
\end{aligned}$$

Analog folgt für den zweiten Term der Umwandlungsplastizität:

$$|I_8| \leq \frac{c_{11}}{3} \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt + \frac{c_{12}}{3} \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \varepsilon_5 \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2.$$

Damit ist insgesamt für fast alle $\vartheta \in [0, T]$:

$$\frac{\rho_0 \theta_0}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}'(\vartheta)\|_{\mathbf{H}_u}^2 + \left(\frac{c_1 \theta_0}{2} - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_5 \right) \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \frac{\rho_0 c_e}{2} \|\tilde{\theta}(\vartheta)\|_{H_\theta}^2 + c_2 \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt \leq$$

$$\leq \left(c_5 + \frac{4c_{12}}{3}\right) \int_0^\vartheta \|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 dt + \left(c_6 + c_7 + \frac{4c_{11}}{3}\right) \int_0^\vartheta \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 dt.$$

Damit folgt für fast alle $\vartheta \in [0, T]$:

$$\|\tilde{\theta}(\vartheta)\|_{H_\theta}^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 \leq \mathbf{C} \int_0^\vartheta \left[\|\tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{\mathbf{V}_u}^2 + \|\tilde{\theta}(t)\|_{H_\theta}^2 \right] dt$$

wobei

$$\mathbf{C} := \frac{\max\{c_5 + \frac{4c_{12}}{3}, c_6 + c_7 + \frac{4c_{11}}{3}\}}{\min\{\frac{c_1\theta_0}{2} - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_5, \frac{\rho_0 c_e}{2}\}}$$

eine geeignet gewählte positive Konstante sei. Mithilfe der Gronwallschen Ungleichung folgt:

$$(5.93) \quad \|\tilde{\theta}(\vartheta)\|_{H_\theta}^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}(\vartheta)\|_{\mathbf{V}_u}^2 = 0$$

für fast alle $\vartheta \in [0, T]$. Damit ist:

$$(5.94) \quad \tilde{\mathbf{u}}(\vartheta) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{\theta}(\vartheta) = 0$$

für fast alle $\vartheta \in [0, T]$ und somit folgt ebenfalls $\tilde{\mathbf{p}}(\vartheta) = 0$ fast überall in $[0, T]$. \square

6 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die mathematische Aufgabe der linearen Thermoelastizität unter Berücksichtigung von Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität untersucht. Den Schwerpunkt bildeten die Beweise der (unter gewissen Einschränkungen gültigen) Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für die schwache Lösbarkeit der genannten Aufgabe via Galerkin-Verfahren und Anwendung des Schauderschen Fixpunktprinzips. Eine ausführliche Darstellung der vorliegenden Themenstellung findet sich in [Boe07].

Hier wurde nur spannungsfreies Umwandlungsverhalten betrachtet, was eine zusätzliche Einschränkung an die Aufgabe darstellt. Unter der Annahme, dass die Funktion γ nur von der Temperatur θ und den Phasenanteilen \mathbf{p} abhängt, war es möglich, im Beweis der Existenz und der Eindeutigkeit des Gesamtproblems in der Fixpunktargumentation eine Temperatur $\bar{\theta} \in \mathcal{H}_\theta$ vorzugeben und den Phasenanteil $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_p$ zu berechnen. Mit diesem Phasenanteil ließ sich erneut die Temperatur θ sowie die Verschiebung \mathbf{u} bestimmen usw.

Der Raum $L^2(0, T; \mathbf{H})$ spielte eine besondere Rolle, weil dieser in den Raum $W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{H})$ kompakt eingebettet. Damit haben wir die Kompaktheit des Fixpunktoperators gezeigt.

Betrachten wir aber spannungsabhängiges Umwandlungsverhalten, so ist die Funktion γ zusätzlich von der Spannung σ_M bzw. σ_V abhängig, welche proportional zum Gradienten der Verschiebung u ist. Nun funktioniert das Fixpunktargument nicht mehr, da $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_u$ benötigt wird. Der Satz von Lions-Aubin kann in dieser Situation nicht angewandt werden, um die Kompaktheit des Fixpunktoperators zu zeigen. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu umgehen, besteht darin, Regularisierungsmethoden, in diesem Fall Regularisierung bzgl. des Ortes (Faltung von \mathbf{u} mit Glättungsfunktionen, vgl. z.B. [AF03]), anzuwenden, um die Fixpunktargumentation in Analogie zu den Beweisen der Sätze 5.10 und 5.12 durchzuführen.

Ausblick

Im Folgenden sei auf möglichen Fortführungen der Thematik hingewiesen, um die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung für die volle Aufgabe der linearen Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität weiter zu untersuchen.

Eine bessere Regularität der Lösung lässt sich eventuell durch spezielle (Galerkin-)Basen für die Verschiebung und die Temperatur (vgl. z.B. [Lio69]) erzielen. Die mögliche Konsequenz dieses Ansatzes könnte sein, zusätzlich spannungsabhängiges Umwandlungsverhalten zu berücksichtigen sowie ohne Regularisierung im Materialgesetz der Umwandlungsplastizität und zusätzliche Bedingungen für den Beweis der Eindeutigkeit auszukommen.

Die zeitliche Semidiskretisierung (vgl. z.B. [HR99, Emm04]) der Bewegungs- und der Wärmeleitungsgleichung sowie ggf. auch der Gleichungen für die Phasenumwandlungen liefert vielleicht bessere Existenzresultate. Eventuell ist es möglich, die Parameter von der Temperatur und den Phasenanteilen abhängen zu lassen.

Eine Entkopplung der Gleichungen der Thermoelastizität hat sich in unserer Herangehensweise als nicht zielführend herausgestellt.

Eine weitere Fortführung auf der Ebene der mathematischen Modellierung wäre die Verbindung des vorliegenden Problems mit Makro-Meso-Untersuchungen oder mit einer Dimensionsanalyse, um die Zahl der wesentlichen Parameter zu reduzieren, qualitative Untersuchungen durchzuführen oder Näherungsrechnungen vorzubereiten.

Weiterführende Arbeiten

Gekoppelte Modelle der Thermo-Elasto-Plastizität zum komplexen physikalischen Materialverhalten von Stahl, die neben der Temperatur und der Deformation insbesondere die Phasenumwandlungen und die Umwandlungsplastizität beschreiben, sind bislang im engeren mathematischen und numerischen Kontext nur wenig untersucht worden. Eine mathematische Untersuchung dieser Anfangs-Randwert-Aufgaben besitzt nicht nur ein eigenständiges mathematisches Interesse, sondern ist von großer Wichtigkeit für die Simulation und Numerik dieser Modelle, um das Verhalten von Bauteilen in bestimmten Situationen, z.B. beim Abschrecken oder Einsatzhärtens, vorherzuberechnen.

In [CHK07] wurde ebenfalls eine mathematische Aufgabe der linearen Thermoelastizität unter Berücksichtigung von Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität untersucht, allerdings nur für die quasi-stationäre Bewegungsgleichung und einfache Randbedingungen.

Besondere Beachtung und der wesentliche Schwerpunkt der weiteren Arbeit liegt auf der Formulierung und der Untersuchung der mathematischen Probleme der Umwandlungsplastizität und deren Wechselwirkung mit der klassischen Plastizität. Es geht darum, Umwandlungsplastizität und klassische Plastizität in Zusammenhang mit der Energie- und Phasenbilanz zu bringen sowie Existenz und Eindeutigkeit der vollen Aufgabe mit klassischer Plastizität zu analysieren. Die Untersuchung der mathematischen Probleme der linearen Thermoelastizität unter Berücksichtigung von Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität sowie deren Wechselwirkungen mit der klassischen Plastizität findet sich in [Boe12].

Zur numerischen Umsetzung der bereits diskutierten Modelle mit realen Daten vgl. [Suh05] als einen Ansatz sowie [Ker11, Suh10]. Eine komplexe Implementierung des Problems (3D-Rechnungen mit realen Daten) und eine vergleichende Bewertung mit kommerziellen Programmpaketten (z.B. COMSOLTM, SYSWELDTM) ist noch offen und könnte sich als größeres Projekt anschließen.

Literatur

- [AF03] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Elsevier Science Ltd., 2003.
- [Ahr03] U. Ahrens. *Beanspruchungsabhängiges Umwandlungsverhalten und Umwandlungsplastizität niedrig legierter Stähle mit unterschiedlich hohen Kohlenstoffgehalten*. Dissertation, Universität Paderborn, 2003.

- [Alt02] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 2002.
- [Ble01] W. Bleck. *Werkstoffkunde Stahl für Studium und Praxis*. Verlag Mainz, 2001.
- [Boe07] S. Boettcher. Zur mathematischen Aufgabe der Thermoelastizität unter Berücksichtigung von Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität. Diplomarbeit, Universität Bremen, 2007.
- [Boe12] S. Boettcher. *Modelling, Analysis and Simulation of Thermo-Elasto-Plasticity with Phase Transitions in Steel*. Dissertation, Universität Bremen, 2012.
- [BPT03] W. Bleck, G. Pariser, and S. Trute. Herstellung und Verarbeitung moderner Stahlwerkstoffe. *HTM Journal of Heat Treatment and Materials*, 58:181–188, 2003.
- [Bra92] D. Braess. *Finite Elemente – Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, 1992.
- [BT06] H. Berns and W. Theisen. *Eisenwerkstoffe - Stahl und Gusseisen*. Springer, 2006.
- [CHK07] K. Chelminski, D. Hömberg, and D. Kern. On a thermomechanical model of phase transitions in steel. WIAS preprint 1225, WIAS Berlin, 2007.
- [Cia88] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*. Elsevier Science Publishers Ltd., 1988.
- [CL55] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of differential equations*. McGraw-Hill, 1955.
- [Dah93] W. Dahl, editor. *Eigenschaften und Anwendungen von Stählen – Band 1: Grundlagen*. Verlag der Augustinus Buchhandlung, 1993.
- [DL76] G. Duvant and J. L. Lions. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer, 1976.
- [DL92] R. Dautray and J. L. Lions. *Evolution Problems 1*. Springer, 1992.
- [DL06] M. Dalgic and G. Löwisch. Transformation plasticity at different phase transformation of a bearing steel. *Materialwissenschaften und Werkstofftechnik*, 37(122), 2006.
- [DLZ06] M. Dalgic, G. Löwisch, and H.-W. Zoch. Beschreibung der Umwandlungsplastizität auf Grund innerer Spannungen während der Phasentransformation des Stahls 100Cr6. *HTM Journal of Heat Treatment and Materials*, 61(222), 2006.
- [Emm04] E. Emmrich. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen – Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende*. Vieweg, 2004.
- [Eva98] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [Fil88] A. F. Fillipov. *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [Fis97] F. D. Fischer. *Modelling and simulation of transformation induced plasticity in elasto-plastic materials*. Springer, 1997.
- [FLHZ09] F. Frerichs, T. Lübben, F. Hoffmann, and H.-W. Zoch. Distortion of conical shaped bearing rings made of SAE 52100. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 40(5-6):402–407, 2009.
- [FRW⁺00] F. D. Fischer, G. Reisner, E. Werner, K. Tanaka, G. Cailletaud, and T. Antretter. A new view on transformation induced plasticity (TRIP). *International Journal of Plasticity*, 16:723–748, 2000.
- [FST96] F. D. Fischer, Q. P. Sun, and K. Tanaka. Transformation-induced Plasticity (TRIP). *Applied Mechanics Reviews*, 49:317–364, 1996.
- [Gaw86] J. Gawinecki. Existence, Uniqueness and Regularity of the Solution of the First Boundary-Initial Value Problem for the Equations of Linear Thermo-Microelasticity. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, 34(7-8), 1986.
- [GGZ74] H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacharias. *Nichtlineare Operatorgleichungen und*

- Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag Berlin, 1974.
- [Hüb07] I. Hüßler. Mathematische Untersuchungen eines gekoppelten Systems von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zur Modellierung von Phasenumwandlungen im Stahl. Diplomarbeit, Universität Bremen, 2007.
- [HK06] D. Hömberg and A. Khludnev. A thermoelastic contact problem with a phase transition. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 71:479–495, 2006.
- [HKLM02] F. Hoffmann, O. Keßler, T. Lübben, and P. Mayr. "Distortion Engineering- Verzugsbeherrschung in der Fertigung. *HTM Journal of Heat Treatment and Materials*, 57(3):213–217, 2002.
- [Hor92] D. Horstmann. *Das Zustandsschaubild Eisen-Kohlenstoff und die Grundlagen der Wärmebehandlung der Eisen-Kohlenstoff-Legierungen*. Verlag Stahleisen, 1992.
- [HR99] W. Han and B. D. Reddy. *Plasticity: mathematical theory and numerical analysis*. Springer, 1999.
- [Ker11] D. Kern. *Analysis and numerics for a thermomechanical phase transition model in steel*. Dissertation, TU Berlin, 2011.
- [KF70] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1970.
- [Koh94] D. Kohtz. *Wärmebehandlung metallischer Werkstoffe*. VDI, 1994.
- [Lio69] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod Gauthier-Villars, 1969.
- [LSU68] O. A. Ladyženskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. American Mathematical Society, 1968.
- [MH83] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications Inc., 1983.
- [Mit87] W. Mitter. Umwandlungsplastizität und ihre Berücksichtigung bei der Berechnung von Eigenspannungen. *Materialkundlich-Technische Reihe, Gebr. Bornträger Verlagsbuchhandlung*, 7, 1987.
- [Mül72] I. Müller. *Thermodynamik - Die Grundlagen der Materialtheorie*. Bertelsmann Universitätsverlag, 1972.
- [Nau05] J. Naumann. Vektorwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen. Humboldt-Universität zu Berlin, 2005.
- [NH81] J. Nečas and I. Hlaváček. *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*. Elsevier Science Ltd., 1981.
- [Nit81] J. A. Nitsche. On Korn's Second Inequality. *RAIRO Numerical Analysis*, 15(3), 1981.
- [Rou05] T. Roubíček. *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Birkhäuser, 2005.
- [RR96] M. Renardy and R. C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, 1996.
- [Sei99] W. Seidel. *Werkstofftechnik*. Carl Hanser Verlag, 1999.
- [SFB07] *Sonderforschungsbereich 570 – Distortion Engineering, Universität Bremen, Antrag für die Förderperiode 2008-2011*, 2007.
- [SFHW09] B. Suhr, F. Frerichs, I. Hüßler, and M. Wolff. Evaluation of models for martensitic transformation and TRIP via comparison of experiments and simulations. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 40(5-6):460–465, 2009.
- [Sho97] R. Showalter. *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1997.

- [SLB95] W. Schröter, K.-H. Lautenschläger, and H. Bibrack. *Taschenbuch der Chemie*. Verlag Harri Deutsch, 1995.
- [Suh05] B. Suhr. Finite-Elemente-Methoden für die Simulation der Wärmebehandlung von Stahl unter Berücksichtigung der Umwandlungsplastizität. Diplomarbeit, Universität Bremen, 2005.
- [Suh10] B. Suhr. *Simulation of steel quenching with interaction of classical plasticity and TRIP – numerical methods and model comparison*. Dissertation, Universität Bremen, 2010.
- [Val88] T. Valent. *Boundary Value Problems of Finite Elasticity – Local Theorems on Existence, Uniqueness and Analytic Dependence on Data*. Springer, 1988.
- [VC75] A. I. Volpert and S. I. Chudyaev. *Analysis in der Klasse der nichtstetigen Funktionen und Gleichungen der mathematischen Physik (russ.) Übersetzung von I. Lind für den interen Gebrauch der AG Modellierung und PDEs*. Verlag Nauka, 1975.
- [WABM06] M. Wolff, C. Acht, M. Böhm, and S. A. Meier. Modeling of carbon diffusion and ferritic phase transformations in an unalloyed hypoeutectoid steel. *Archives of Mechanics*, 59(4-5):435–466, 2006.
- [Wal00] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen – Eine Einführung*. Springer, 2000.
- [WB03] M. Wolff and M. Böhm. Umwandlungsplastizität bei Stählen im Konzept der Thermoelasto-Plastizität – modelliert mit dem Ansatz einer Zwischenkonfiguration. *Technische Mechanik*, 23(1):29–48, 2003.
- [WB06a] M. Wolff and M. Böhm. Transformation-induced plasticity in steel – general modelling, analysis and parameter identification. ZeTeM Report, Universität Bremen, 2006.
- [WB06b] M. Wolff and M. Böhm. Transformation-induced plasticity: Modeling and analysis in 3-d case with more than two phases. *PAMM*, 6(1):415–416, 2006.
- [WBB07] M. Wolff, M. Böhm, and S. Boettcher. Phase transformation in steel in the multi-phase case – general modelling and parameter identification. ZeTeM Report, Universität Bremen, 2007.
- [WBBL07] M. Wolff, S. Boettcher, M. Böhm, and I. Loesch. Vergleichende Bewertung von makroskopischen Modellen für die austenitisch-perlitische Phasenumwandlung im Stahl 100Cr6. ZeTeM Report, Universität Bremen, 2007.
- [WBD03] M. Wolff, M. Böhm, and S. Dachkovski. Volumenanteile versus Massenanteile – der Dilatometerversuch aus der Sicht der Kontinuumsmechanik. ZeTeM Report, Universität Bremen, 2003.
- [WBH08] M. Wolff, M. Böhm, and D. Helm. Material behaviour of steel – modeling of complex phenomena and investigations on thermodynamic consistency. *International Journal of Plasticity*, 24:746–774, 2008.
- [WBS04] M. Wolff, M. Böhm, and A. Schmidt. Phase transitions and transformation-induced plasticity of steel in the framework of continuum mechanics. *Journal de Physique*, IV(120):145–152, 2004.
- [Wer05] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2005.
- [WFL07] M. Wolff, F. Frerichs, and N. Lysenko. Bewerten von Modellen der Martensitbildung bei nichtmonotoner Abkühlung für den Stahl 100Cr6. ZeTeM Report, Universität Bremen, 2007.
- [Wlo87] J. Wloka. *Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1987.
- [WS03] M. Wolff and B. Suhr. Zum Vergleich von Massen- und Volumenanteilen bei der perlitischen Umwandlung der Stähle 100Cr6 und C80. ZeTeM Report, Universität Bremen, 2003.

- [WW04] N. Wegst and C. Wegst. *Stahlschlüssel-Taschenbuch: Wissenwertes über Stähle*. Verlag Stahlschlüssel, 2004.
- [Zei88] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications IV - Applications to Mathematical Physics*. Springer, 1988.
- [Zei90a] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A - Linear Monotone Operators*. Springer, 1990.
- [Zei90b] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B - Nonlinear Monotone Operators*. Springer, 1990.

Adresse des Autors:

Dipl.-Math.techn. Sören Boettcher, Zentrum für Technomathematik, Fachbereich 3, Universität Bremen, Postfach 330440, D-28334 Bremen, soerenb@math.uni-bremen.de