ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen II
SS 2019

Übungsblatt 10

Präsenzübungen

P42. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen (bzgl. der Standardbasis) der folgenden linearen Abbildungen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 5x - y$

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2y+3z \\ 4(x+z) \\ -(x-y) \end{pmatrix}$

d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$

P43. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der linearen Abbildung mit der darstellenden reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P44. Seien V, W Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ linear. Zeigen Sie:

a) f injektiv $\iff \ker f = \{0\}$

b) $\ker f$ ist ein Untervektorraum von V.

c) $\operatorname{Im} f$ ist ein Untervektorraum von W.

P45. Sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ x \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $\ker \varphi$ und Bild φ.

Bitte wenden!

Zusatzaufgaben

1. Zeigen oder Widerlegen Sie:
   a) Die Eigenwerte einer reellen Matrix sind immer reell.
   b) Das charakteristische Polynom einer lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hat Grad n.
   c) Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hat höchstens n Eigenwerte.
   d) Die Eigenvektoren zu einem Eigenwert bilden einen Untervektorraum.
   e) Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hat genau n linear unabhängige Eigenvektoren.
   f) Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix bilden immer eine Orthonormalbasis.
   g) Das charakteristische Polynom χ_A ist ein Produkt von Linearfaktoren, wenn A eine Diagonalmatrix ist.