ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen II
SS 2019

Übungsblatt 9

Studienleistung: In der Woche vom 17.06.-23.06.2019 (KW 25) geben Sie in Ihrem Tutorium eine Bearbeitung von jeweils einer Präsenzaufgaben der Übungsblätter 7, 8 und 9 ab; also genau drei Aufgaben. Sie können dabei zwischen jeweils einer Aufgabe von P29-P32, P33-P36 und P37-P41 wählen. Die Abgaben erfolgen einzeln und handschriftlich. Verspätete Abgaben werden nicht akzeptiert.

Präsenzübungen

P37. Invertieren Sie die folgende reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

P38. Bestimmen Sie die reelle Matrix A, für die gilt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 12 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

P39. Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Matrix A (mindestens der Dimension 2×2) für die gilt:

a) $\det(A) = 0$

b) $\det(A) = -4$

c) $\det(A) = 19$

P40. Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

P41. Zeigen Sie, dass die Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

für 2×2-Matrizen der Definition entspricht und für 3×3-Matrizen äquivalent zu der Regel von Sarrus ist.

Bemerkung: Tatsächlich ist die Leibnizformel eine äquivalente Möglichlichkeit, die Determinante zu definieren (statt über Zeilenentwicklung).

Bitte wenden!

Zusatzaufgaben

1. Zeigen Sie, dass für invertierbare Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ gilt:
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
2. Geben Sie ein Beispiel für eine nicht invertierbare reelle Matrix.
3. Geben Sie ein Beispiel für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, für die gilt: $AB \neq BA$.
4. Sei A eine Matrix der Dimension (m, n) und B eine Matrix der Dimension (r, s). Wann ist sowohl das Produkt AB als auch das Produkt BA definiert?
5. Geben Sie, falls möglich, ein Beispiel für zwei Matrizen A, B passender Dimension, so dass $AB = 0$ aber $BA \neq 0$ gilt.
6. Geben Sie, falls möglich, ein Beispiel für zwei nicht-quadratische Matrizen A, B, so dass $AB = \mathbb{1}$ gilt.
7. Zeigen Sie: Die Menge $K^{m \times n}$ der $m \times n$-Matrizen bildet bezüglich Matrixaddition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum.