ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen II
SS 2019

Übungsblatt 6

Studienleistung: In der Woche vom 27.05.-02.06.2019 (KW 22) geben Sie in Ihrem Tutorium eine Bearbeitung von jeweils einer Präsenzaufgabe der Übungsblätter 4,5 und 6 ab, also insgesamt 3 Aufgaben. Sie können dabei zwischen jeweils einer Aufgabe von P16-P19, P20-P24 und P25-P28 wählen. Die Abgaben erfolgen einzeln und handschriftlich. Verspätete Abgaben werden nicht akzeptiert.

Präsenzübungen

P25. Bestimmen Sie die erste Ableitung der beiden folgenden Abbildungen:

a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp\big(x \sin(x)\big)$

b) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2+\sin(x)\cos(x)}$

P26. Sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3x + 1$. Berechnen Sie für den Startwert $x_0 = 1$ die ersten Schritte des Newton-Verfahren, bis sich an der fünften Nachkommastelle nichts mehr ändert.

Hinweis: Sie können zur Berechnung der Folgenglieder einen Taschenrechner benutzen.

P27. Bestimmen Sie das dritte Taylor-Polynom der Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x^2$, um den Entwicklungspunkt $x_0 = 5$

Hinweis: Geben Sie die Koeffizienten im Taylorpolynom in möglichst einfacher Form an. Sie müssen allerdings die Klammern der Form $(x - x_0)^k$ nicht ausmultiplizieren.

P28. Entwickeln Sie $\cos(x)$ in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgaben

1. Welche elementargeometrische Vorstellung kann man mit dem Begriff Ableitung verbinden?

2. In welchem Sinne liefert die Ableitung $f'(x_0)$ (bzw. eine Bildung unter Zuhilfenahme der Ableitung) eine Approximation von $f(x)$ für $x \approx x_0$?

3. Sei I ein Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. Kann der Graph von f Sprünge oder Ecken und Kanten besitzen? Was kann man dazu für stetige, nicht notwendigerweise differenzierbare, Funktionen sagen?

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ so oft wie nötig differenzierbar. Was haben Anstiege von Tangenten an Punkte des Graphen von f mit Monotonie und Extrema zu tun?

5. Bestimmen Sie mithilfe der Differentialrechnung die Extrema der folgenden Funktionen (falls vorhanden):
   a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x - 6$
   b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 + 5x - 10$
   c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 5 \cdot \sin(x) + x$
   d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 7$
   e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

6. Kann eine in x_0 differenzierbare Funktion f in $(x_0, f(x_0))$ zwei verschiedene Tangenten besitzen?

7. Geben Sie eine geometrische Interpretation des Satzes von Rolle und des ersten Mittelwertsatzes an.

8. Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(a) < 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) < f(a)$. Machen Sie zurnächst eine Skizze.