

Übungsblatt 5

Präsenzübungen

P20. Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

wobei die Folge (a_n) gegeben ist durch:

$$a_{2n} = \frac{1}{8^n}$$
$$a_{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8^n}$$

Zeigen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz der Reihe.

P21. Zeigen Sie: die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}$ ist stetig auf ganz \mathbb{C} .

- P22.** a) Zeigen Sie: Ist f eine stetige (reelle oder komplexe) Funktion, so ist auch $|f|$ stetig.
b) Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Umkehrung der obigen Aussage an. D. h. finden Sie eine Funktion f , so dass $|f|$ stetig ist, aber f unstetig ist.

P23. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1, & x \leq 2 \\ -x + 5, & x > 2 \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

P24. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos(x) - x$$

im Intervall $[0, \pi]$ (oder $[0^\circ, 180^\circ]$) eine Nullstelle hat.

Zusatzaufgaben

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} (z-1)^n.$$

2. Zeigen Sie mittels des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums, dass

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

in $x_0 = 5$ stetig ist.

3. Geben Sie ein Gegenbeispiel zu folgender, oft zu hörender aber falscher Aussage:
Den Funktionsgraphen einer stetigen Funktion kann man zeichnen, ohne den Stift abzusetzen.
4. Internetrecherche: Finden Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die an **keiner** Stelle stetig ist.