ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen II
SS 2018

Übungsblatt 10

Präsenzübungen

P40. Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ -7 & 11 & 3 \\ 2 & -9 & -11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 18 & 10 & 28 & 0 & 41 \\ -7 & 0 & 11 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -9 & 0 & -11 \\ 5 & 1 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

P41. Sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ x \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $\ker \varphi$ und $\operatorname{Bild} \varphi$.

P42. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der linearen Abbildung mit der darstellenden reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P43. Führen Sie die ersten vier Schritte des Vektoriterationsverfahren für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und dem Startvektor $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Stellen Sie eine Vermutung über den Eigenvektor auf, der hier approximiert wird. Überprüfen Sie, ob das tatsächlich ein Eigenvektor der Matrix ist, und ermitteln Sie ggf. den zugehörigen Eigenwert.

Bitte wenden!

Zusatzaufgaben

1. Zeigen oder Widerlegen Sie:
   a) Die Eigenwerte einer reellen Matrix sind immer reell.
   b) Das charakteristische Polynom einer lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hat Grad n.
   c) Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hat höchstens n Eigenwerte.
   d) Die Eigenvektoren zu einem Eigenwert bilden einen Untervektorraum.
   e) Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hat genau n linear unabhängige Eigenvektoren.
   f) Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix bilden immer eine Orthonormalbasis.
   g) Das charakteristische Polynom χ_A ist ein Produkt von Linearfaktoren, wenn A eine Diagonalmatrix ist.