ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen II
SS 2018

Übungsblatt 9

Für eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ik})$, eine $n \times r$-Matrix $B = (b_{kj})$ ist das Produkt $A \cdot B$ die Matrix $C = (c_{ij})$ mit den Koeffizienten

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Zu einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ heißt die $n \times m$-Matrix $A^t = (a_{ji})$ die *transponierte Matrix* zu A. Gilt für eine quadratische $n \times n$-Matrix A, dass $A = A^t$, so heißt A symmetrische Matrix. Für eine quadratische $n \times n$-Matrix A definiert man rekursiv: $A^0 = \mathbb{1}_n$ und für $n > 0$: $A^n = A^{n-1} \cdot A$.

Präsenzübungen

P36. Bestimmen Sie alle Potenzen A^n und B^k ($n, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) der reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -7 & -6 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -2 \\ -25 & 11 & -5 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

P37. Zeigen Sie, dass für invertierbare Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ gilt:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

P38. Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen, so gilt:

$$AB = BA \iff AB \text{ ist symmetrisch.}$$

Hinweis: Es gilt: $(AB)^t = B^t A^t$

P39. Invertieren Sie die folgenden reellen Matrizen, falls dies möglich ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

Zusatzaufgaben

1. Geben Sie ein Beispiel für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, für die gilt: $AB \neq BA$.
2. Sei A eine Matrix der Dimension (m, n) und B eine Matrix der Dimension (r, s). Wann ist sowohl das Produkt AB als auch das Produkt BA definiert?
3. Geben Sie, falls möglich, ein Beispiel für zwei Matrizen A, B passender Dimension, so dass $AB = 0$ aber $BA \neq 0$ gilt.
4. Geben Sie, falls möglich, ein Beispiel für zwei nicht-quadratische Matrizen A, B, so dass $AB = \mathbb{1}$ gilt.
5. Zeigen Sie: Die Menge $K^{m \times n}$ der $m \times n$-Matrizen bildet bezüglich Matrixaddition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum.