ALTA
Institute for Algebra, Geometry,
Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen II
SS 2018

Übungsblatt 7

Eine (halbe) Probeklausur
Bearbeiten Sie diese Aufgaben unter *Klausurbedingungen*. Sie haben dazu in den Tutorien diese Woche Gelegenheit. Bedenken Sie: In der Klausur dürfen Sie einen nichtprogrammierbaren, nichtgrafikfähigen Taschenrechner nutzen. Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben sollten Sie sich etwa 45 Minuten Zeit nehmen. Der Umfang entspricht etwa einer halben Klausur. Die Punkteangaben geben einen Anhalt, wie die Gewichtung der Aufgaben in der Klausur sein könnte.
Eine Musterlösung zu diesen Aufgaben wird nächste Woche bereitgestellt.

P28. Bestimmen Sie ob die folgenden Reihen konvergent und/oder absolut konvergent sind:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ (5 Punkte)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^{n+1}}{(-n)^n}$ (5 Punkte)

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{7^n}$ (5 Punkte)

P29. a) Geben Sie eine Funktion $f\colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ an, welche **nicht** beschränkt ist. (Ein Beweis ist nicht nötig) (5 Punkte)

b) Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist unstetig in $x_0 = 0$. (10 Punkte)

P30. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren näherungsweise die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x^3 + 3x - 5$ auf fünf Nachkommastellen genau. Wählen Sie dazu als Startwert $x_0 = 2.5$.

(10 Punkte)

P31. Bestimmen Sie

$$\int_0^3 x\sin(x^2+2)dx.$$

(10 Punkte)

Bitte wenden!

Zusatzaufgaben

1. Welche elementargeometrische Vorstellung kann man mit dem Begriff Ableitung verbinden?

2. In welchem Sinne liefert die Ableitung $f'(x_0)$ (bzw. eine Bildung unter Zuhilfenahme der Ableitung) eine Approximation von $f(x)$ für $x \approx x_0$?

3. Sei I ein Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. Kann der Graph von f Sprünge oder Ecken und Kanten besitzen? Was kann man dazu für stetige, nicht notwendigerweise differenzierbare, Funktionen sagen?

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ so oft wie nötig differenzierbar. Was haben Anstiege von Tangenten an Punkte des Graphen von f mit Monotonie und Extrema zu tun?

5. Kann eine in x_0 differenzierbare Funktion f in $(x_0, f(x_0))$ zwei verschiedene Tangenten besitzen?

6. Geben Sie eine geometrische Interpretation des Satzes von Rolle und des ersten Mittelwertsatzes an.

7. Sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(a) < 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) < f(a)$. Machen Sie zurnächst eine Skizze.