ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

20.02.2019

Klausur

im Modul Mathematische Grundlagen I

Name, Vorname: ____

Matrikelnummer: ________________________

1. Hinweis: Dieses Deckblatt wird erst auf Anweisung der Aufsichtsführenden umgeblättert. Danach beginnt die Bearbeitungszeit.
2. Bearbeitungszeit: 120 Minuten
3. Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
4. Bewertungskriterien: Insgesamt sind 70 Punkte erreichbar. Mindestanforderung: 35 Punkte, zusammen mit dem Posterprojekt 49 Punkte ($\widehat{=}$Note 4,0).
5. Arbeitsanweisung
   a) Name, Vorname und Matrikelnummer sind auf diesem Deckblatt einzutragen.
   b) Diese Klausur wurde maschinell gelegt. Prüfen Sie daher die fortlaufende Nummerierung der Seiten.
   c) Die Lösungen zu den Aufgaben sind auf der jeweiligen Seite und Rückseite einzutragen.
   d) Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungen.

Viel Erfolg!

Vom Prüfenden auszufüllen!

Punkte / Note / Handzeichen / Datum

1	2	3	4	5	6	Σ

____

Aufgabe 1. Bearbeiten Sie **eine** Teilaufgabe. (10 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$9 \mid 4^{2n+1} + 5^{2n+1}$$

b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Aufgabe 2. Bearbeiten Sie **eine** Teilaufgabe. (10 Punkte)

a) Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie: Ist $a \circ a = e$ für alle $a \in G$. so ist G abelsch.

b) Geben Sie alle Untergruppen der Gruppe S_3 an. Welche sind Normalteiler? Bestimmen Sie die zugehörigen Faktorgruppen.

Aufgabe 3. Bearbeiten Sie **alle** Teilaufgaben.

a) Sei M eine nichtleere Menge und R eine Relation auf M, welche sowohl eine totale Ordnung, als auch eine Äquivalenzrelation ist. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von M. (5 Punkte)

b) Geben Sie eine Menge M zusammen mit einer Halbordnung R auf M an, welche keine totale Ordnung ist. (5 Punkte)

c) Geben Sie die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ an:

$$a \sim b \Leftrightarrow 6 \mid (a - b)$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. Bearbeiten Sie **eine** Teilaufgabe. (10 Punkte)

Gegeben Sei der logische Ausdruck $X = (A \to B) \vee C$.

a) Stellen Sie X in Disjunktiver Normalform dar.

b) Stellen Sie X in Konjunktiver Normalform dar.

Aufgabe 5. Bearbeiten Sie **eine** Teilaufgabe. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Anzahl aller Zahlen aus $\{1,\ldots,1000\}$, welche weder durch 3,4 oder 10 teilbar sind.

b) Sei $G = (V,E)$ ein einfacher, ungerichteter Graph mit $|V| \geq 2$. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene $v,w \in V$ gibt mit $\operatorname{grad} v = \operatorname{grad} w$.

Aufgabe 6. Bearbeiten Sie **alle** Teilaufgaben.

a) Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen mittels des chinesischen Restesatzes:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 2 \\ x &\equiv 0 \pmod 3 \\ x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

(10 Punkte)

b) Finden Sie das Inverse zu $\overline{13}$ in $\mathbb{Z}_{87}^*$. (5 Punkte)