ALTA
Institute for Algebra, Geometry,
Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2018/19

Übungsblatt 13

Präsenzübungen

P48. Betrachten Sie den vollständigen Graphen K^5, also den (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Graphen mit fünf Knoten, bei denen jeder Knoten mit jedem anderem Knoten durch genau eine Kante verbunden ist.

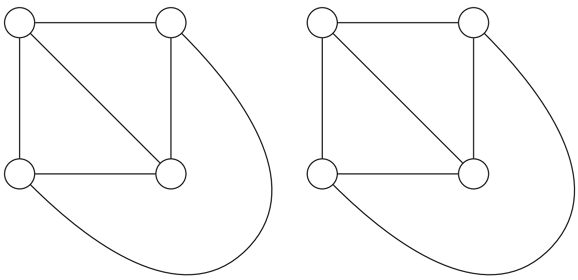
a) Geben Sie die Adjazenzmatrix des Graphen an.

b) Geben Sie, falls möglich, einen Eulerkreis oder eine Eulertour in K_5 an.

P49. Geben Sie einen Graphen mit vier Knoten an, der keinen Eulerkreis, aber eine Eulertour besitzt.

P50. Geben Sie eine Graphen mit fünf Knoten an, der keine Eulertour, aber einen Hamiltonkreis besitzt.

P51. Betrachten Sie den folgenden planaren (und nicht zusammenhängenden) Graphen:



a) In wieviele Regionen zerlegt dieser Graph die Ebene?

b) Wie kann man die Eulerformel für planare, nicht-zusammenhängende Graphen verallgemeinern? Überlegen Sie sich dazu Beispiele für nicht-zusammenhängende Graphen, und stellen Sie eine Vermutung auf.

c) Beweisen Sie ggf. Ihre Vermutung.

Bitte wenden!

Verständnisfragen (Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle)

1. Was ist eine Eulertour, was ist ein Eulerkreis?
2. Wann besitzt ein Graph eine Eulertour / einen Eulerkreis?
3. Was ist ein hamiltonscher Graph?
4. Was besagt die Eulerformel für planare Graphen?
5. Gilt die Eulerformel auch für die Oberfläche einer Kugel? Was ist mit der Oberfläche eines Donuts?
6. Warum endet das Spiel Brussels Sprout?
7. Begründen Sie, warum beim Spiel Brussels Sprouts der Graph am Ende immer zusammenhängend ist.
8. Was ist eine Gewinnstrategie?
9. Warum können beim Chomp nicht beide Spieler eine Gewinnstrategie haben?
10. Kann ein Spieler mehr als eine Gewinnstrategie haben?

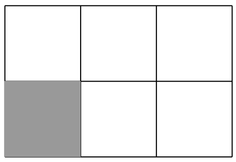
Weitere Aufgaben zum Selbststudium

1. Geben Sie ein Beispiel für eine Partie Sprouts an, bei dem der Endzustand des Spiels keinen zusammenhängenden Graphen bildet.

2. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, ungerichteter Graph. Der zu G *komplementäre Graph* $\overline{G} = (V, \overline{E})$ besitzt die selben Knoten wie G und zwei Knoten in $\overline{G}$ sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie es in G nicht sind.
   a) Zeigen Sie: Ist G nicht zussammenhängend, so ist $\overline{G}$ zusammenhängend.
   b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Umkehrung gilt auch.

3. Geben Sie zwei zueinander isomorphe Graphen an, die verschiedene Adjazenzmatrizen haben. Wodurch unterscheiden sich diese Matrizen?

4. Finden Sie eine Gewinnstrategie für den ersten Spieler für das Chomp 2×3:

   Stellen Sie dazu zunächst den Graph des Chomp 2×3 auf.

5. Formulieren Sie eine Gewinnstrategie für den ersten Spieler im Chomp $2 \times n$, und begründen Sie Ihre Antwort.

6. a) Wieviele Knoten hat der Graph des Chomp $1 \times n$?
   b) Wieviele Knoten hat der Graph des Chomp $2 \times n$?
   c) Wieviele Knoten hat der Graph des Chomp $3 \times n$?

   Geben Sie jeweils eine Begründung an.