ALTA
Institute for Algebra, Geometry,
Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2018/19

Übungsblatt 12

Präsenzübungen

P44. Ein Graph G heißt *planar*, falls es möglich ist, G so zu zeichnen, dass sich keine zwei Kanten schneiden (außer in den Endpunkten).

Betrachten Sie den vollständigen Graphen K^5, also den (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Graphen mit fünf Knoten, bei denen jeder Knoten mit jedem anderem Knoten durch genau eine Kante verbunden ist.

a) Zeichnen Sie den Graphen.

b) Warum kann der Graph nicht planar gezeichnet werden?

c) Geben Sie einen geschlossenen Weg in K^5 an, in dem jeder Knoten zweimal aber jede Kante höchstens einmal vorkommt.

P45. Ein Graph G heißt *assymetrisch*, falls die Automorphismengruppe von G trivial ist (also nur id enthält).

Finden Sie ein Beispiel für einen asymmetrischen Graphen mit $n > 1$ Knoten.

P46. Seien G und H die beiden folgenden Graphen. Geben Sie einen Homomorphismus $G \to H$ und einen Homomorphismus $H \to G$ an.

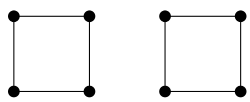


Abbildung 1: Der Graph G.

Abbildung 2: Der Graph H.

P47. Bestimmen Sie den Graphen mit $n > 1$ Knoten, welcher die folgenden Eigenschaften erfüllt:

I. Je zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden.

II. Zu jeder Kante a gibt es genau eine andere Kante b, welche keinen gemeinsamen Knoten mit a hat.

In welchem Zusammenhang aus dem Kapitel Logik tritt dieser Graph auf?

Bitte wenden!

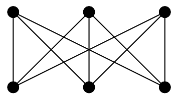
Verständnisfragen (Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle)

1. Was ist ein Graph?
2. Was ist ein Graphhomomorphismus?
3. Was ist ein asymmetrischer Graph?
4. Was ist ein Weg?
5. Wann heißt ein Graph einfach?
6. Wann heißt ein Graph Wald?
7. Wann heißt ein Graph Baum?
8. Was ist ein planarer Graph?
9. Was bedeutet zusammenhängend?
10. Was ist ein vollständiger Graph?
11. Bestimmen Sie die Anzahl der Kanten des K^n.

Weitere Aufgaben zum Selbststudium

1. Geben Sie einen Graphen an, dessen Automorphismengruppe genau drei Elemente enthält.

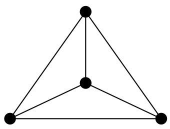
2. Bestimmen Sie die Ordnung der Automorphismengruppe des nachstehenden Graphen.



3. Bestimmen Sie die Automorphismengruppe der folgenden Graphen

   a)

   b)

   c) 

4. Zeigen Sie: Ein zusammenhängender Graph ist genau dann ein Baum, wenn er durch Entfernen einer beliebigen Kante unzusammenhängend wird.

5. Zeigen Sie: Ein zusammenhängender, kreisfreier Graph ist genau dann ein Baum, wenn er durch hinzufügen einer Kante zwischen zwei beliebigen Knoten einen Kreis erhält.

6. Zeigen Sie: Ein Graph ist genau dann ein Baum, wenn es zwischen zwei beliebigen Knoten genau einen Weg, in dem keine Kante mehrfach durchlaufen wird, gibt.

7. Zeigen Sie: Jeder Automorphismus eines Baumes lässt eine Ecke oder eine Kante fest.

8. Beweisen oder widerlegen Sie, dass in jedem zusammenhängenden Graphen ein Kantenzug existiert, der jede Kante in jeder ihrer beiden Richtungen genau einmal durchläuft.