ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2018/19

Übungsblatt 11

Präsenzübungen

P40. Bestimmen Sie die Einheiten von $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$.

P41. Zeigen Sie: In Integritätsringen gelten die Kürzungsregeln: Für alle $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ gelten

$ac = bc \Rightarrow a = b$ und

$ca = cb \Rightarrow a = b$.

P42. Zeigen Sie: Einheiten sind keine Nullteiler.

P43. Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_5[X]$: $(X^6 + 3X^4 + 4X^2 + 2) : (3X^2 + 2)$

Bitte wenden!

Verständnisfragen (Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle)

1. Wie ist ein Ring definiert?
2. Geben Sie Beispiele für Ringe an.
3. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring an, der kein Körper ist.
4. Was ist der Unterschied zwischen einem kommutativen, nullteilerfreien Ring mit Eins und einem Körper?
5. Was ist ein Restklassenring?
6. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Zeigen Sie: $(R^*, \cdot)$ ist eine Gruppe.
7. Was ist eine Einheit?
8. Was ist ein Nullteiler?
9. Was ist ein Integritätsring?
10. Was ist eine Körper?
11. Bekannterweise ist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper. Überprüfen Sie, ob $(\mathbb{R}, \cdot, +)$ ebenfalls ein Körper ist.
12. Warum fordert man bei der Definition des Polynomrings $R[X]$, dass R kommutativ mit Eins sein soll?
13. Wie kann man einen Polynomring in mehreren Unbestimmten definieren?
14. Sind Ideale Unterringe? Und Umgekehrt?

Weitere Aufgaben zum Selbststudium

1. Prüfen Sie, ob $(\mathbb{R}, +, *)$ ein Ring ist, wobei $*\colon R \times R \longrightarrow R$ als Verknüpfung wie folgt definiert ist: $a * b = 0$ für alle $a, b \in R$.

2. Prüfen Sie, ob $(\mathbb{R}, \max, +)$ ein Ring ist, wobei max die Verknüpfung

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{sonst} \end{cases}$$

   ist.

3. Bestimmen Sie die Einheiten von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

4. $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn n eine Primzahl ist.

5. Sei $R \neq \{0\}$ ein Ring mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in R$ gilt: $a^2 = a$. Zeigen Sie:
   a) Für alle $a \in R$ gilt: $a + a = 0$

   b) R ist kommutativ. **Hinweis:** Nutzen Sie a).

6. Seien R ein Ring und I, J Ideale in R. Zeigen Sie, dass dann auch $I \cap J$ ein Ideal in R ist.

7. Sei K ein Körper, $\{0\} \neq I \subseteq K$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $I = K$ gilt.

8. Seien in $\mathbb{Z}_7[X]$ die beiden folgenden Polynome gegeben:

$$P = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$$
$$Q = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 1$$

   Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(P, Q)$.

9. Sei R ein Ring mit 1 und $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie: Ist $I \cap R^* \neq \emptyset$, so ist $I = R$.

10. Zeigen Sie: Ein Körper enthält genau zwei Ideale, das Nullideal und das Einsideal.

11. Sei R ein kommutativer Ring mit nicht-trivialer Multiplikation. Außerdem enthalte R nur die beiden trivialen Ideale. Zeigen Sie:
    a) R ist ein Ring mit Eins.
    b) R ist ein Körper.