ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2018/19

Übungsblatt 10

Präsenzübungen

P36. Zeigen Sie, dass für Elemente $g_1, \ldots, g_n$ einer Gruppe G gilt

$$(g_1 \cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}.$$

P37. Sei der Homomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ mit $\varphi(1) = 2$ gegeben.

a) Bestimmen Sie Kern und Bild von φ

b) Bestimmen Sie den Index von Kern und Bild von φ.

P38. Definieren Sie die prime Restklassengruppe modulo n. Betrachten Sie die Gruppen $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ für $n \in \{5, 8, 9, 12, 20\}$. Welche dieser Gruppen sind zyklisch? Geben Sie für die zyklischen Gruppen je einen Erzeuger an.

P39. Zeigen Sie: Gruppen von Index 2 sind Normalteiler.

Bitte wenden!

Verständnisfragen (Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle)

1. Wie ist der Kern eines Homomorphismus defininert?
2. Wie ist das Bild eines Homomorphismus defininert?
3. Wann heißt eine (Unter-)Gruppe zyklisch?
4. Sind Untergruppen zyklischer Gruppen wieder zyklisch? Warum (nicht)?
5. Geben Sie Beispiel für zyklische Gruppen.
6. Warum sind zyklische Gruppen immer abelsch?
7. Warum sind Gruppen mit Primordnung zyklisch?
8. Was besagt der Satz von Lagrange?
9. Wann heißt eine Untergruppe Normalteiler?
10. Kann man auch eine Gruppenstruktur auf den Nebenklassen von U definieren, wenn U kein Normalteiler ist?

Weitere Aufgaben zum Selbststudium

1. Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Aut}\, G = \{id\}$, so ist G abelsch.
2. Geben Sie alle Untergruppen der $\mathbb{Z}_{42}$ an.
3. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ fest gewählt. Betrachten Sie die Abbildung
$$\begin{aligned} c_g \colon G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass c_g die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:
   a) $c_g \circ c_{g'} = c_{gg'}$;
   b) $c_{g^{-1}} = \left(c_g\right)^{-1}$.
4. Zeigen Sie: c_g ist ein Automorphismus.
5. Sei G eine endliche Gruppe, $U, V \leq G$ Untergruppen von G und $U \subseteq V$. Zeigen Sie:
$$|G : U| = |G : V| \cdot |V : U|$$