ALTA
Institute for Algebra, Geometry,
Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2018/19

Übungsblatt 9

Präsenzübungen

P33. Betrachten Sie die Gruppe $G = \mathbb{Z}_{10}^*$.

a) Bestimmen Sie die Ordnung von G.

b) Stellen Sie die Multiplikationstafel für G auf.

c) Leiten Sie aus der Multiplikationstafel die Ordnung der Gruppenelemente ab.

P34. Sei G eine Menge und $*$ eine assoziative Verknüpfung auf G. Zudem gebe es ein linksneutrales Element e, d. h. für alle $g \in G$ gilt: $e * g = g$. Außerdem gebe es für jedes $g \in G$ ein linksinverses Element g^{-1}, d. h. $g^{-1} * g = e$. Zeigen Sie:

a) Für alle $g \in G$ gilt: $g * g^{-1} = e$ (jedes Linksinverse ist auch rechtsinvers).

b) Für alle $g \in G$ gilt: $g * e = g$ (das Linksneutrale ist auch rechtsneutral).

c) Das linksneutrale Element ist eindeutig bestimmt.

d) Das linksinverse Element zu g ist eindeutig bestimmt.

Hinweis: Die einzelnen Aussagen müssen in der angegebenen Reihenfolge bewiesen werden, dann kann man ab der zweiten Aussage die vorherigen Aussagen benutzen.

P35. Sei $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ eine sechselementige Menge mit einer Verknüpfung $*$ auf G, so dass G eine Gruppe ist. Vervollständigen Sie die Verknüpfungstafel:

$*$	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Hinweis: Nutzen Sie die Kürzungsregeln um zunächst herauszufinden, welches Element das neutrale Element ist.

Bitte wenden!

Verständnisfragen (Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle)

1. Wann heißt eine Gruppe abelsch?
2. Geben Sie Beispiele für endliche und unendliche, abelsche und nicht-abelsche Gruppen.
3. Sind $(G, *)$ und $(H, \circ)$ Gruppen, wie kann man dann sinnvoll auf $G \times H$ eine Gruppenstruktur definieren?
4. Geben Sie die Verknüpfungstabellen für $\mathbb{Z}_3$ und und $\mathbb{Z}_6^*$ an. Was fällt Ihnen auf?
5. Kann man in Aufgabe **P34.** auch die Existens eines linksneutralen aber rechtsinversen Elements fordern und trotzdem zeigen, dass G eine Gruppe ist?
6. Gibt es abelsche Gruppen mit nichtabelschen Untergruppen?
7. Gibt es nicht-abelsche Gruppen mit nichttrivialen abelschen Untergruppen?
8. Gibt es zu jeder natürlichen Zahl n eine Gruppe der Ordnung n? Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist dies nicht der Fall?
9. Sind Gruppen gleicher Ordnung isomorph?
10. Besitzt jede Gruppe $G \neq \{e\}$ eine nichttriviale Untergruppe?
11. Warum ist die Abbildung $\lambda_g \colon G \longrightarrow G$ mit $\lambda_g(x) = gx$ bijektiv?

Weitere Aufgaben zum Selbststudium

1. Untersuchen Sie die folgenden inneren Verknüpfungen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auf Assoziativität, Kommutativität und Existenz von neutralen Elementen:
   a) $(m, n) \mapsto m^n$,
   b) $(m, n) \mapsto \mathrm{kgV}(m, n)$,
   c) $(m, n) \mapsto \mathrm{ggT}(m, n)$,
   d) $(m, n) \mapsto m + n + mn$.
2. Stellen Sie die Gruppentafel der S_3 auf.
3. Betrachten Sie die Gruppe $G = \mathbb{Z}_{20}^*$.
   a) Bestimmen Sie die Ordnung von G.
   b) Stellen Sie die Multiplikationstafel für G auf.
   c) Leiten Sie aus der Multiplikationstafel die Ordnung der Gruppenelemente ab.
4. Geben Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}_{20}$ an.
5. Zeigen Sie: Alle Gruppen der Ordnung 4 sind abelsch.
6. Bestimmen Sie – bis auf Isomorphie – alle Gruppen G mit $|G| \leq 6$.
7. Zeigen Sie: Ist $(G, *)$ eine Gruppe und gilt $g * g = e$ für alle $g \in G$, so ist G abelsch.
8. Zeigen Sie: Ist $\varphi\colon G \longrightarrow G$ mit $\varphi(g) = g^{-1}$ ein Automorphismus, so ist G abelsch.