ALTA
Institute for Algebra, Geometry,
Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2018/19

Übungsblatt 8

Präsenzübungen

P29. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

b) Sind a, b reelle Zahlen, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

P30. Bestimmen Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen $1 \leq n \leq 100$, welche durch 2 oder 3 teilbar sind.

P31. Zeigen Sie: Unter neun beliebigen natürlichen Zahlen gibt es stets zwei Zahlen a, b, so dass gilt: $8 \mid (a-b)$.

Hinweis: Schubfachprinzip

P32. Geben sind 2 Permutationen $a, b \in S_5$ in Zweizeilenform und eine $c \in S_5$ in Zyklenschreibweise wie folgt:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad c := (2\,3)(1\,4\,5).$$

a) Schreiben Sie die Permutationen a und b in Zyklenschreibweise.

b) Berechnen Sie, $a \circ b$, $c \circ b \circ a$ und $b \circ c \circ b^{-1}$.

Bitte wenden!

Verständnisfragen (Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle)

1. Was besagt das Schubfachprinzip?
2. Warum funktioniert das Schubfachprinzip bei unendlichen Mengen (nicht)?
3. Wie viele injektive Abbildungen gibt es von einer zehnelementigen Menge in eine zwölfelementige Menge?
4. Was besagt dass Prinzip von Inklusion-Exklusion?
5. Wieviele natürliche Zahlen $1 \leq n \leq 100$ lassen sich nicht durch 2, 3 oder 8 teilen?
6. Gilt das Prinzip von Inklusion-Exklusion auch für unendliche Mengen? Begründung?
7. Zeigen Sie, dass für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
8. Warum sind zwei Permutationen $d \in S_i, e \in S_j, i \neq j$ nicht miteinander verknüpfbar?
9. Wie viele Permutationen gibt es in S_n?
10. Wie viele Permuationen der S_n bestehen aus nur einem Zyklus?
11. Wie viele Permutationen der S_n lassen keine Element fest?

Weitere Aufgaben zum Selbststudium

1. Für Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $k > n$ setzen wir $\binom{n}{k} = 0$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über m:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}.$$

2. Zeigen Sie, dass für jede Primzahl p gilt:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

3. Inklusion-Exklusion:
   a) Bestimmen Sie die Anzahl der Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 1000)$, welche durch 2, 3 oder 5 teilbar sind.
   b) Bestimmen Sie die Anzahl der Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 1000)$, welche durch 3, 6 oder 7 teilbar sind.

4. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es k und m aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$n \,\Big|\, \sum_{i=k}^{m} a_i$$

5. Gegeben sind 2 Permutationen $a, b \in S_3$ in Zweizeilenform, wie folgt:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Schreiben Sie die Permutationen a und b in Zyklenschreibweise und berechnen Sie $a \circ b$ und $b \circ a$.

6. Bestimmen Sie alle Elemente $\tau \in S_4$, so dass für alle $\sigma \in S_4$ gilt: $\sigma\tau = \tau\sigma$.

7. Bestimmen Sie das Signum der Permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

8. In einem gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge 7 cm sind 50 Punkte eingezeichnet. Zeigen Sie, dass es zwei Punkte gibt, deren Abstand weniger als 1 cm beträgt.