**ALTA**
**Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications**

Universität Bremen

**Dr. Tim Haga**

**Mathematische Grundlagen I**
**WS 2018/19**

# Übungsblatt 6

## Präsenzübungen

**P20.** Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum\limits_{i=0}^{n} i\right)^2$.

Geben Sie explizit an wo die Induktionsvoraussetzung verwendet wird.

**P21.** Das Assoziativgesetz der Multiplikation auf den natürlichen Zahlen lässt sich mittels vollständiger Induktion wie folgt beweisen.

Vollständige Induktion über $n$. Seien $k$ und $m$ fest aber beliebig gewählt.

Induktionsanfang $n = 0$: Es gilt

$$(k \cdot m) \cdot 0 = 0 = k \cdot 0 = k \cdot (m \cdot 0). \tag{1}$$

Induktionsschritt: Es gelte also $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Wir müssen zeigen: $(k \cdot m) \cdot S(n) = k \cdot (m \cdot S(n))$.

$$\begin{aligned}
(k \cdot m) \cdot S(n) &= k \cdot m + (k \cdot m) \cdot n && (2)\\
&= k \cdot m + k \cdot (m \cdot n) && (3)\\
&= k \cdot (m + m \cdot n) && (4)\\
&= k \cdot (m \cdot S(n)). && (5)
\end{aligned}$$

a) Begründen Sie, warum $k$ und $m$ fest aber beliebig gewählt und nicht auch als Induktionsvariable genutzt werden.

b) Begründen Sie, die Gleichungen (1) - (5). Erläutern Sie, wie die einzelnen Umformungsschritte zustande kommen und welche Voraussetzungen benutzt werden.

**P22.** Zeigen Sie, dass gilt: $1 < 4$. Nutzen Sie dabei die Definition von $<$ aus dem Kapitel über die Peano-Axiome.

**P23.** Zeigen Sie das Kommutativgesetz der Multiplikation auf den ganzen Zahlen; d. h. zeigen Sie, dass für alle $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)}.$$

**Bitte wenden!**

**Verständnisfragen** (Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle)

1. Was bedeutet „wohldefiniert“, bzw. „unabhängig von der Wahl der Repräsentanten“?
2. Wie werden die natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen eingebettet?
3. Warum ist die Teilbarkeitsrelation eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$, aber nicht auf $\mathbb{Z}$?
4. Warum ist die Division mit Rest eindeutig?

**Weitere Aufgaben zum Selbststudium**

1. Zeigen Sie, dass die Multiplikation von ganzen Zahlen

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}.$$

   wohldefiniert ist, d. h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

2. Zeigen Sie, dass für alle Elemente $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}, \overline{(e,f)} \in \mathbb{Z}$ gelten:
   a) Assoziativität der Multiplikation:

$$\overline{(a,b)} \cdot \left(\overline{(c,d)} \cdot \overline{(e,f)}\right) = \left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}\right) \cdot \overline{(e,f)}.$$

   b) Neutrales Element der Multiplikation: $\overline{(1,0)} \cdot \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}$.
   c) Distributivitätsgesetz:

$$\overline{(a,b)} \cdot \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right) = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)}.$$