ALTA
Institute for Algebra, Geometry,
Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2018/19

Übungsblatt 5

Präsenzübungen

P16. Untersuchen Sie die Abbildungen $f_i\colon X_i \to Y_i,\ x \mapsto x^2$ auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität:

a) $X_1 = Y_1 = \mathbb{R}$;

b) $X_2 = Y_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$;

c) $X_3 = \mathbb{N},\ Y_3 = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Geben Sie in allen Fällen die Urbildmenge $f_i^{-1}(5)$ an.

P17. Seien X, Y, Z Mengen, $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen und $A, B \subseteq X$.

a) Zeigen Sie: $f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$.

b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, um zu zeigen, dass die folgende Behauptung im Allgemeinen nicht gilt: $f(X \setminus A) \subseteq f(X) \setminus f(A)$.

P18. In der Vorlesung wurde folgender Satz bewiesen: Seien $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Dann gilt: Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f.

Beweis:

1) Seien $x, y \in X$, wobei $x \neq y$ gelte.

2) Da ________________, ist $g(f(x)) \neq g(f(y))$.

3) Es folgt $f(x) \neq f(y)$, da ____________________.

4) Also ist f injektiv. $\square$

Vervollständigen Sie den Beweis. Vermeiden Sie es dabei, in Ihren Vorlesungsnotizen zu spicken.

P19. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$.

c) Für alle $n \in \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 5\}$ gilt: $2^n > n^2$.

Geben Sie explizit an wo die Induktionsvoraussetzung verwendet wird.

Bitte wenden!

Verständnisfragen (Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle)

1. Wie kann man eine beliebige Abbildung surjektiv machen, ohne die Abbildungsvorschrift zu ändern?
2. Wie kann man eine beliebige injektive Abbildung bijektiv machen, ohne die Abbildungsvorschrift zu ändern?
3. Wann heißt eine Zahl a Teiler von b?
4. Was versteht man unter der Methode der vollständigen Induktion?
5. Wie lauten die Peano-Axiome?
6. Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $M \neq \mathbb{N}$, welche den Peano-Axiomen genügt.
7. Warum erfüllen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ die Peano-Axiome nicht?
8. Überlegen Sie sich Beispiele von Aussagen, die mit vollständiger Induktion bewiesen werden können.
9. Was ist der Unterschied zwischen schwacher und starker Induktion?

Weitere Aufgaben zum Selbststudium

1. Seien X, Y, Z Mengen, $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen und $A, B \subseteq X$ sowie $C, D \subseteq Y$. Zeigen Sie:
   a) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,
   b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,
   c) $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$.

   Geben Sie Gegenbeispiele an, um zu zeigen, dass die folgenden Behauptungen im Allgemeinen nicht gelten:
   d) $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$,
   e) $f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$,
   f) $f\big(f^{-1}(C)\big) \supseteq C$.

2. Seien $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:
   1) Sind f und g injektiv, dann auch $g \circ f$.
   2) Ist $g \circ f$ surjektiv, so auch g.
   3) Ist g injektiv und $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.
   4) Ist f surjektiv und $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

3. Die Fibonacci-Zahlen F_n sind rekursiv definiert durch:
   - Man setzt: $F_0 := 1$ und $F_1 := 1$
   - Für $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ setzt man: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

   a) Bestimmen Sie die ersten 6 Fibonacci-Zahlen.
   b) Berechnen Sie, $2F_0 + \sum_{k=1}^{n} F_k$ für $n = 1, \ldots, 6$
   c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   $$2F_0 + \sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2}$$

   Geben Sie explizit an wo die Induktionsvoraussetzung verwendet wird.

4. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:
   a) $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.
   b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} i^3 = (\sum\limits_{i=0}^{n} i)^2$.

   Geben Sie explizit an wo die Induktionsvoraussetzung verwendet wird.