ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2018/19

Übungsblatt 4

Präsenzübungen

P11. Seien A, B Teilmengen der Menge X. Beweisen Sie eines der de Morganschen Gesetze der Mengenlehre:

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

P12. Seien A und B Mengen.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

b) In der Vorlesung wurde (allgemeiner) bewiesen, dass

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

P13. Es seien eine Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und eine Relation

$$R = \{(1,1), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5), (5,5)\}$$

auf A gegeben.

a) Warum ist R keine Halbordnung?

b) Welche Elemente müssen mindestens zu R hinzugenommen werden, um eine Halbordnung zu erhalten? Begründen Sie ihre Antwort.

c) Ist die unter b) erhaltene Halbordnung eine totale Ordnung? Begründen Sie ihre Antwort.

P14. In der Vorlesung wurde folgender Satz bewiesen:

Satz 3.8. Sei A eine Menge und R eine Äquivalenzrelation auf A und $x, y \in A$. Dann gilt:

$$\overline{x} = \overline{y} \quad \text{oder} \quad \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset.$$

Der Beweis wird nun noch einmal in Einzelteile zerlegt wiedergegeben:

Beweis.

a) Angenommen $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$.

b) Dann ist $z \in \overline{x}$ und $z \in \overline{y}$,

Bitte wenden!

c) also gilt zRx und zRy.

d) Wegen der Symmetrie und Transitivität von R gilt dann xRy

e) und nach Satz 7 aus Kapitel 3: $\overline{x} = \overline{y}$.

Erläutern Sie jeden Schritt in diesem Beweis, d. h. begründen Sie für jeden der fünf Schritte, warum die getroffenen Annahmen gelten und wie der Schluss daraus folgt.

P15. Die Abbildungen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch $f(x) = 3x - 11$ und $g(x) = x^2$. Bestimmen Sie die Verknüpfungen $f \circ g$ und $g \circ f$.

Verständnisfragen (Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle)

1. Was besagen das Extensionalitätsaxiom und das Leermengenaxiom?
2. Was ist die Potenzmenge einer Menge? Wie groß ist ihre Kardinalität?
3. Kann eine Menge sich selbst enthalten? Begründung?
4. Warum gibt es nicht die Menge aller Mengen?
5. Warum ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$?
6. Warum gibt es nur eine leere Menge (und nicht etwa mehrere verschiedene)?
7. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen?
8. Wie viele verschiedene k-elementigen Teilmengen hat eine Menge mit n Elementen?
9. Ist M eine Menge und N eine echte Teilmenge von M. Hat M dann immer mehr Elemente als N?
10. Sei M eine Menge und N eine Teilmenge von M. Wie viele Elemente enthält $M \setminus N$?
11. Welche Elemente enthält das kartesische Produkt $\{1,2\} \times \emptyset$?
12. Begründen Sie, warum im Allgemeinen $A \times B = B \times A$ nicht gilt.
13. Wie viele Elemente enthält das kartesische Produkt einer endlichen Familie von endlichen Mengen?
14. Sei $M = \{1,2\}$ und $N = \{1,2,3\}$. Geben Sie alle zweielementigen Teilmengen von $M \times N$ an.
15. Beschreiben sie die folgenden Eigenschaften von Relationen mit eigenen Worten: Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, Totalität, Linkstotalität, Rechtseindeutigkeit.
16. Finden Sie Beispiele für Äquivalenzrelationen, Halbordnungen und totale Ordnungen auf $\mathbb{N}$ und auf $\mathcal{P}(M)$, wobei M eine beliebige Menge ist.
17. Geben Sie ein Beispiel für eine Halbordnung, die keine totale Ordnung ist.
18. Ist M eine Menge und R sowohl Äquivalenzrelation als auch totale Ordnung auf M, was kann man dann über M sagen?
19. Warum definiert eine Äquivalenzrelationen auf einer Menge eine Partition der Menge?
20. Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n \geq 0$.
    a) Wieviele Elemente muss dann eine reflexive Relation auf M wenigstens enthalten?

b) Wieviele Elemente muss dann eine symmetrische Relation auf M wenigstens enthalten?

c) Wieviele Elemente muss dann eine antisymmetrische Relation auf M wenigstens enthalten?

d) Wieviele Elemente muss dann eine transitive Relation auf M wenigstens enthalten?

e) Wieviele Elemente muss dann eine Partition von M wenigstens enthalten?

21. Kann man Relationen auch zwischen mehr als zwei Mengen definieren? Wie?

22. Wann heißt eine Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv?

23. Welche Abbildungen sind Äquivalenzrelationen?

24. Warum kann die Frage "Ist die Abbildung $f(x) = x^2$ injektiv?" nicht sinnvoll beanwtortet werden?

25. Was ist das Bild einer Menge unter einer Abbildung?

26. Was ist das Urbild einer Menge unter einer Abbildung?

27. Was ist der Graph einer Abbildung?

28. Warum sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig?

29. Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig?

30. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit man zwei Abbildungen f und g verknüpfen kann?

31. Wann kann man sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ bilden?

Weitere Aufgaben zum Selbststudium

1. Seien A, B Teilmengen der Menge X. Beweisen Sie ein de Morgansches Gesetz der Mengenlehre:
$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

2. Seien A, B, C Mengen.
   a) Zeigen Sie: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   b) Zeigen Sie: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   c) Sei $B \subseteq A$. Zeigen Sie: $B = A \setminus (A \setminus B)$

3. Ein geordnetes Paar (a, b) wurde defininiert als $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
   Zeigen Sie, dass für zwei geordnete Paare (a, b) und (x, y) gilt:
$$(a, b) = (x, y) \Longleftrightarrow a = x \wedge b = y.$$
   Hinweis: Sie müssen hier zwei Richtungen zeigen. Machen Sie eine Fallunterscheidung in zwei Fälle, je nachdem ob es sich bei $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ um eine ein- oder zweielementig Menge handelt.

4. Es sei $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Partition von A. Die Relation R sei definiert durch
$$xRy \Longleftrightarrow \exists M \in P \colon x \in M \wedge y \in M.$$
   Zeigen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf A.

5. Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2\}$.
   a) Geben Sie alle Relationen auf M an.
   b) Welche der Relationen aus a) sind Äquivalenzrelationen, Halbordnungen, Totale Ordnungen?
   c) Welche der Relationen aus a) sind linkstotal, rechtseindeutig, beides?

6. Ein *Intervall* in $\mathbb{R}$ ist eine Teilmengen der Form $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
   a) Sei die Abbildung $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $x \longmapsto x^2 - 1$. Bestimmen Sie, jeweils mit kurzer Begründung, die folgenden Mengen (machen Sie sich die Situation ggf. zunächst an einem Schaubild klar):
      i) $f\big([-1, 2]\big)$
      ii) $f^{-1}\big([0, 1]\big)$
      iii) $f^{-1}(0)$
   b) Bestimmen Sie eine Menge X, so dass die Abbildung $f \colon X \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1$ injektiv wird. Begründen Sie ihre Antwort.

7. Gegeben sei die Funktion $f \colon x \mapsto \frac{x+7}{x+5}$. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D von f. Lösen Sie die Gleichung nach $y = f(x)$ nach x auf. Bestimmen Sie den Wertebereich $\operatorname{Bild} f$ und zeigen Sie, dass $f \colon D \to \operatorname{Bild} f$ bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrfunktion f^{-1}.

Bitte wenden!

8. Untersuchen Sie die Abbildungen $f_i\colon X_i \to Y_i$, $x \mapsto x^2$ auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität:

   a) $X_1 = Y_1 = \mathbb{R}$;
   b) $X_2 = Y_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$;
   c) $X_3 = Y_3 = \mathbb{N}$;
   d) $X_3 = \mathbb{N}$, $Y_3 = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   Geben Sie in allen Fällen die Urbildmenge $f_i^{-1}(5)$ an.