

Übungsblatt 2

Präsenzübungen

P4. Entscheiden Sie, ob die folgenden Ausdrücke Aussagen oder Aussageformen sind. Wenn es sich um eine Aussage oder Aussageform handelt, negieren Sie diese. Begründen Sie, wenn es sich weder um eine Aussage noch um eine Aussageform handelt.

- a) Alle Primzahlen sind ungerade.
- b) $(x > 0) \wedge (3 < 5)$.
- c) Wenn $x > 5$ ist, dann ist $y < 3$.
- d) Wahr.
- e) $x = -3 \rightarrow -3$.

P5. Seien A, B, C Aussagen. Zeigen Sie:

- a) $A \rightarrow B \iff (\neg A) \vee B$
- b) $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$

P6. Betrachten Sie das Axiomensystem MuKoBa aus der Vorlesung. In der Vorlesung wurde folgender Satz bewiesen:

Satz: Jeder Student studiert mindestens zwei Fächer.

Beweisen Sie nun die folgende Aussage:

Jedes Fach wird von mindestens zwei Studenten belegt.

Dabei dürfen Sie die Axiome aus MuKoBa sowie den obigen Satz benutzen.

P7. Zeigen Sie, dass die logischen Operatoren \wedge , \rightarrow und \leftrightarrow in gewissem Sinne überflüssig sind. D. h., geben Sie Aussagenverknüpfungen an, in denen ausschließlich die logischen Operatoren \neg und \vee benutzt werden, und die dieselben Wahrheitstabellen haben wie $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, und $A \leftrightarrow B$.

Verständnisfragen Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle.

1. Was ist der Unterschied zwischen einer Aussage und einer Aussagenform?
2. Was ist ein Axiom?
3. Was sind All- und Existenzaussagen?
4. Wann heißen zwei logische Terme logisch äquivalent?
5. Wieviele Zeilen hat eine Wahrheitstabelle für einen Ausdruck in n Variablen?
6. Was ist eine Tautologie? Was eine Kontradiktion? Geben Sie jeweils ein Beispiel.
7. Wann ist die Aussage $A \text{ xor } B \text{ xor } C$ erfüllt? Verallgemeinern Sie die Aussage für n Variablen.
8. Was ist eine konjunktive Normalform (KNF), was eine disjunktive Normalform (DNF)?
9. Wie erhält man aus einem beliebigen logischen Ausdruck Z seine KNF bzw. DNF? Muss man dazu die Wahrheitstafel von Z aufstellen?
10. Wie erhält man aus einem logischen Ausdruck, der als KNF vorliegt, die entsprechende DNF? Wie geht es umgekehrt?
11. Wann ist eine Bedingung notwendig; wann ist sie hinreichend?
12. Könnte man die Widerlegungsregel (Modus tollens) $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \implies \neg A$ auch zu $(A \rightarrow B) \wedge \neg A \implies \neg B$ umformulieren?

Weiter Aufgaben zum Selbststudium

1. Welche dieser Ausdrücke sind Aussagen, welche Aussagenformen? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $(7 > 0) \wedge (3 < 5)$.

b) x ist durch 7 teilbar oder 3 ist eine gerade Zahl.

2. Finden Sie eine Verknüpfung der Aussagen A, B, C mithilfe der Operatoren \neg, \vee und \wedge , so dass sich folgende Wahrheitstafel ergibt:

A	B	C	?
W	W	W	W
W	W	F	F
W	F	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	W	F	F
F	F	W	W
F	F	F	W

3. Gegeben sei die folgende Aussagenverknüpfung (NAND).

A	B	$A \otimes B$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

Zeigen Sie, dass man nur mithilfe von \otimes die logischen Operatoren \neg und \vee (folglich auch \wedge, \rightarrow und \leftrightarrow) darstellen kann. D. h., geben Sie Aussagenverknüpfungen an, in denen nur die Verknüpfung \otimes benutzt wird, und die dieselben Wahrheitstabellen haben wie $\neg A$ und $A \vee B$.

4. Seien A, B, C Aussagen. Zeigen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen:

a) $(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

b) $(A \text{ xor } B) \text{ xor } C \iff (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge C \vee ((\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge \neg C$

5. Zeigen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen:

a) $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$.

b) $(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

c) $(A \leftrightarrow B) \iff (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

d) $(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

6. Beweisen Sie folgende Aussage zum Axiomensystem MuKoBa aus der Vorlesung:
Es gibt mindestens sechs Fächer.

Dabei dürfen Sie die Axiome, sowie die folgenden beiden Aussagen benutzen:

- a) Jeder Student studiert mindestens zwei Fächer.

b) Jedes Fach wird von mindestens zwei Studenten studiert.

Als Knobelaufgabe können Sie noch bestimmen, wieviele Studenten im MuKoBa immatrikuliert sind.