ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga

13.04.2018

Modulprüfung

im Modul Mathematische Grundlagen I

Name, Vorname: ____

Matrikelnummer: ________________________

1. Hinweis: Dieses Deckblatt wird erst auf Anweisung der Aufsichtsführenden umgeblättert. Danach beginnt die Bearbeitungszeit.
2. Bearbeitungszeit: 120 Minuten
3. Zugelassene Hilfsmittel: Keine
4. Bewertungskriterien: Insgesamt sind 70 Punkte erreichbar. Mindestanforderung: 35 Punkte, zusammen mit den benoteten Hausübungen 49 Punkte ($\widehat{=}$Note 4,0)
5. Arbeitsanweisung
   a) Name, Vorname und Matrikelnummer sind auf diesem Deckblatt einzutragen.
   b) Diese Klausur wurde maschinell gelegt. Prüfen Sie daher die fortlaufende Nummerierung der Seiten.
   c) Die Lösungen zu den Aufgaben sind auf der jeweiligen Seite und Rückseite einzutragen.
   d) Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungen.

Viel Erfolg!

Vom Prüfenden auszufüllen!

Punkte / Note / Handzeichen / Datum

1	2	3	4	5	6	B	Σ

____

Aufgabe 1. Seien A, B, C logische Ausdrücke. Gegeben sei der folgende logische Ausdruck X in Konjunktiver Normalform:

$$X = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C).$$

a) Stellen Sie die Wahrheitstafel des Ausdrucks X auf. (5 Punkte)

b) Geben Sie den Ausdruck X in Disjunktiver Normalform an. (5 Punkte)

Aufgabe 2. Seien X, Y, Z Mengen, $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ und $\psi\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Sei $\psi \circ \varphi$ injektiv und φ surjektiv. Zeigen Sie, dass dann ψ injektiv ist. (5 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beliebig, aber fest gewählt. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 4. a) Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 2 \\ x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned}$$

(10 Punkte)

b) Finden Sie das Inverse zu $\overline{25}$ in der Gruppe $\mathbb{Z}_{89}^*$. (5 Punkte)

Aufgabe 5. a) Geben Sie einen konkreten Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}_{14} \longrightarrow \mathbb{Z}_{35}$ an. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Ordnung von $(\mathbb{Z}_{16}^{*}, \cdot)$. Ist $(\mathbb{Z}_{16}^{*}, \cdot)$ zyklisch? (10 Punkte)

Aufgabe 6. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ zwei linear unabhängige Vektoren und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Sei der Vektor u gegeben durch $u \coloneqq w - \frac{\langle w,v \rangle}{\langle v,v \rangle} v$.

a) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren u und v orthogonal sind. (10 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass u und v linear unabhängig sind, ohne Teil a) zu nutzen. (5 Punkte)

Bonusaufgabe. Sei $\{0\} \neq R$ ein Ring mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in R$ gilt: $a^2 = a$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $a + a = 0$. (10 Punkte)