

Dr. Tim Haga

28.02.2018

Modulprüfung

im Modul Mathematische Grundlagen I

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

1. Hinweis: Dieses Deckblatt wird erst auf Anweisung der Aufsichtsführenden umgeblättert. Danach beginnt die Bearbeitungszeit.
2. Bearbeitungszeit: 120 Minuten
3. Zugelassene Hilfsmittel: Keine
4. Bewertungskriterien: Insgesamt sind 70 Punkte erreichbar. Mindestanforderung: 35 Punkte, zusammen mit den benoteten Hausübungen 49 Punkte ($\hat{=}$ Note 4,0)
5. Arbeitsanweisung
 - a) Name, Vorname und Matrikelnummer sind auf diesem Deckblatt einzutragen.
 - b) Diese Klausur wurde maschinell gelegt. Prüfen Sie daher die fortlaufende Nummerierung der Seiten.
 - c) Die Lösungen zu den Aufgaben sind auf der jeweiligen Seite und Rückseite einzutragen.
 - d) Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungen.

Viel Erfolg!

Vom Prüfenden auszufüllen!

Punkte / Note / Handzeichen / Datum

1	2	3	4	5	6	B	Σ

Aufgabe 1. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ zwei linear unabhängige Vektoren und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n . Sei der Vektor u gegeben durch $u := w - \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$.

a) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren u und v orthogonal sind. (10 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass u und v linear unabhängig sind, ohne Teil a) zu nutzen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. Seien A, B, C logische Ausdrücke. Gegeben sei der folgende logische Ausdruck X in Disjunktiver Normalform:

$$X = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C).$$

- a) Stellen Sie die Wahrheitstafel des Ausdrucks X auf. (5 Punkte)
- b) Geben Sie den Ausdruck X in Konjunktiver Normalform an. (5 Punkte)

Aufgabe 3. Seien X, Y, Z Mengen, $\varphi: X \rightarrow Y$ und $\psi: Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Sei $\psi \circ \varphi$ surjektiv und ψ injektiv. Zeigen Sie, dass dann φ surjektiv ist. (5 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beliebig, aber fest gewählt. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 5. a) Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen:

$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

(10 Punkte)

b) Finden Sie das Inverse zu $\overline{25}$ in der Gruppe \mathbb{Z}_{89}^* .

(5 Punkte)

- Aufgabe 6.** a) Geben Sie einen konkreten Gruppenhomomorphismus $\varphi: \mathbb{Z}_{14} \longrightarrow \mathbb{Z}_{35}$ an.
(5 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Ordnung von $(\mathbb{Z}_{16}^*, \cdot)$. Ist $(\mathbb{Z}_{16}^*, \cdot)$ zyklisch? (10 Punkte)

Bonusaufgabe. Bestimmen Sie, wie viele Zahlen der Menge $\{1, \dots, 1000\}$ durch 3, 4, oder 6 teilbar sind. (10 Punkte)

