Mathematische Grundlagen I
Logik und Algebra

Dr. Tim Haga

20. Oktober 2017

Präliminarien

- Letzte Vorlesung: *Kapitel 0: Spiele*
- Diese Vorlesung: *Kapitel 1: Aussagenlogik*
- Müssen uns vorher auf ein paar Begriffe verständigen

Mathematik lernen heißt auch, eine Sprache zu lernen

- Mathematik ist eine eigene Sprache, mit eigenem Wortschatz und Grammatik.
- Manche Begriffe kennt man aus der Alltagssprache, einige haben aber in der Mathematik eine andere Bedeutung.
- Mathematiker benutzen nicht immer die selbe Sprache:
  - Bezeichnungen je nach verwendeter Literatur verschieden.
  - Für diese Veranstaltung: Es gilt das, was in der Vorlesung/auf den Übungsblättern steht.

Mathematik heißt Beweisen

- Diese Vorlesung ist (fast) beweisvollständig.
- D. h. Nachdem wir uns auf einige grundlegende Annahmen verständigt haben, werden (fast) alle Aussagen bewiesen.
- Es ist eine Ihrer wesentlichen eigenen Leistungen, diese Beweise nachzuvollziehen und zu verstehen.

Leichter gesagt als getan

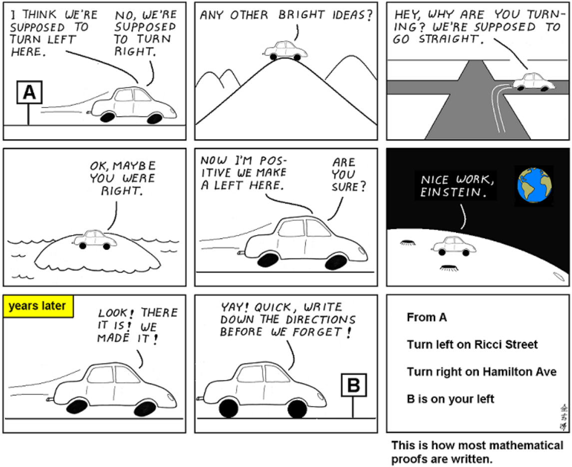

Abbildung: `http://abstrusegoose.com/230`

Daher: Üben, Üben, Üben

- Wir werden in den Übungen immer wieder das Beweisen und auch das Beweisverstehen üben.

Lernziel

Nach der heutigen Vorlesung sollen Sie

- wichtige Grundbegriffe der mathematischen Logik kennen und unterscheiden können;
- die wichtigsten logischen Operatoren anwenden können;
- für komplexe logische Ausdrücke die disjunktive und konjunktive Normalform aufstellen können;

Logik = „Sprache der Mathematik“

Logik (von griechisch λόγος– Sinn, Vernunft).
heißt: Vernünftiges Schlussfolgern.
Wesentliche Fragestellungen:

- Wann ist eine Aussage wahr?
- Wie schließt man richtig?
- Wie erhält man neue Erkenntnisse aus Alten?

Müssen klären: Was ist eine *Aussage*? Was heißt *wahr/richtig*?

Zunächst: Begriffe klären

Mittels einer *Definition* verabreden wir die Bedeutung eines bestimmten Begriffs.

Was ist eine Aussage?

Definition 1:

Eine *Aussage* ist ein grammatikalischer Ausdruck, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr oder falsch ist. Eine Aussage kann wahr oder falsch sein, aber nicht beides zugleich oder irgendwas dazwischen.

Beispiel 2:

- Heute ist Freitag. (Wahr, W)
- $3 > 5$. (Unwahr, Falsch, F)

Wahr oder falsch

Es gibt Aussagen, von denen wir nicht wissen, ob sie wahr oder falsch sind.

Beispiel 3:

Es gibt unendlich viele Paare von Primzahlen, deren Abstand gleich 2 ist.

Ob etwas eine Aussage ist, hängt vom Kontext und den vorkommenden Objekten ab.

- $x > 0$. Keine Aussage. Was ist x?
- Das Schaf ist schwarz. Keine Aussage. Welches Schaf genau?
- $5 + 3$. Überhaupt keine Aussage, nur ein Term.

Hingegen ist

$$\text{Für alle reellen Zahlen } x \text{ gilt: } x > 0.$$

eine Aussage. (Eine Falsche!)

Spezielle Aussagen

Definition 4:

Ein *Axiom* ist eine Aussage, die für Wahr erklärt wird. Ist in der Regel nicht beweisbar.

Beispiel 5:

Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.

Definition 6:

Ein *Satz*, auch *Lemma*, *Korollar*, *Proposition*, *Theorem* ist eine wahre Aussage.

Aussageformen

Definition 7:

Eine Aussageform ist ein Ausdruck in Variablen der zu einer Aussage wird wenn alle darin vorkommenden Variablen durch konkrete Objekte ersetzt werden. Diese Objekte müssen aus einer geeigneten Grundgesamtheit kommen.

Beispiel 8:

- x ist ohne Rest durch 7 teilbar. Geeignete Grundgesamtheit für x: Natürliche Zahlen
- $y = 4x + 5$. Geeignete Grundgesamtheit für x, y: z. B. Reelle Zahlen.

1 Aussagenlogik

- Erste Begriffe
- Logische Operatoren
- Disjunktive und Konjunktive Normalformen
- Logisches Schließen

Negation von Aussagen

Notation 9:

Für eine Aussage A schreiben wir $\neg A$ für die Verneinung (auch Negation) von A.

Beispiel 10:

Aussage A: Die Zahl 7 ist gerade.
Negation von A: Die Zahl 7 ist ungerade.

Beispiel 11:

Aussage B: Alle Schafe sind schwarz.
Negation von B: Nicht alle Schafe sind schwarz.
Äquivalente Formulierung: Es gibt mindestens ein Schaf, welches nicht schwarz ist.

Negation von Aussagen

Bei *All*- und *Existenzaussagen* ist vorsicht geboten!

Beispiel 12:

Aussage: Es gibt eine reelle Zahl x mit $x > 7$.
Negation: Für alle reellen Zahlen x gilt: $x \leq 7$.
Aussage: Für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 \geq 0$.
Negation: Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 < 0$.

Negation von Aussagen

Darstellung als Wahrheitstafel

A	$\neg A$
W	F
F	W

Tabelle: Wahrheitstafel der Negation.

Konjunktion von Aussagen

Seien A und B Aussagen. Wann ist die Aussage:

Es gilt A und B (kurz: $A \wedge B$)

wahr?
Diese Verknüpfung von Aussagen wird *Verundung* oder *Konjunktion* genannt.

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Tabelle: Wahrheitstafel der Konjunktion.

Disjunktion von Aussagen

Seien A und B Aussagen. Wann ist die Aussage:

$$\text{Es gilt } A \text{ oder } B \text{ (kurz: } A \vee B\text{)}$$

wahr?

Diese Verknüpfung von Aussagen wird *Veroderung* oder *Disjunktion* genannt.

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Tabelle: Wahrheitstafel der Disjunktion.

Wenn-Dann-Verknüpfung

Seien A und B Aussagen. Wann ist die Aussage:

$$\text{Wenn } A \text{ gilt, dann gilt auch } B \text{ (kurz: } A \to B)$$

wahr?
Diese Verknüpfung von Aussagen wird *Wenn-Dann-Verknüpfung* genannt.

A	B	$A \to B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Tabelle: Wahrheitstafel der Implikation. **Achtung:** Die letzen beiden Zeilen sind nicht intuitiv. (Ex falso quod libet!)

Implikation

Ist die verknüpfte Aussage $A \to B$ wahr, so nennt man dies eine *Implikation*, und schreibt

$$A \Rightarrow B.$$

Dies liest man als *Aus A folgt B*, oder *A ist hinreichend für B*, oder *B ist notwendig für A*.

Genau-Dann-Verknüpfung

Seien A und B Aussagen. Wann ist die Aussage:

Genau dann, wenn A gilt, gilt auch B (kurz: $A \leftrightarrow B$)

wahr?

Diese Verknüpfung von Aussagen wird *Genau wenn-Dann-Verknüpfung* oder *Bijunktion* genannt.

A	B	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Tabelle: Wahrheitstafel der Äquivalenz.

Exklusives Oder

Man kann noch viele weitere Verknüpfungen definieren. Häufig kommt folgende vor:

A	B	$A \operatorname{xor} B$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Tabelle: Wahrheitstafel des Exklusiven Oders.

Junktoren, Terme

- Die logischen Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ... nennt man *Junktoren*.

Definition 13:

Ein Ausdruck in Aussagen A, B, C, ..., welche durch Junktoren verknüpft sind, heißt *(logischer) Term*.

Definition 14:

Zwei Terme Z_1 und Z_2 heißen *logisch äquivalent*, wenn sie für alle Werte der darin vorkommenden Variablen denselben Wahrheitswert haben.
Wir schreiben: $Z_1 \Leftrightarrow Z_2$.

Logische Äquivalenz

Beispiel 15:

$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

Wir benutzen runde Klammern (,) um einen Teilterm um klar zu machen, in welcher Reihenfolge die logischen Operatoren ausgewertet werden sollen.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
W	F	W
F	W	F

Rechenregeln für logische Operatoren

Satz 16

1. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (Negation von UND)*
2. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (Negation von ODER)
3. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (Assoziativgesetz)*
4. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (Assoziativgesetz)
5. $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (Distributivgesetz)
6. $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ (Distributivgesetz)
7. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ (Kommutativgesetz)*
8. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (Kommutativgesetz)
9. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$*
10. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Spezielle Terme

Definition 17:

Ein logischer Term heißt Tautologie, wenn er stets wahr ist, unabhängig davon welche Aussagen eingesetzt werden.

Beispiel 18:

Satz vom ausgeschlossenen Dritten (Tertium non Datur): $A \vee \neg A$.

Definition 19:

Ein logischer Term heißt Kontradiktion, wenn sie stets falsch ist, egal welche Aussagen eingesetzt werden.

Beispiel 20:

Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: $A \wedge \neg A$.

Normalformen

- Es ist sinnvoll , sich bei logischen Ausdrücken auf eine standardisierte Form zu einigen.
- Vereinbarung: Man beschränkt sich auf die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$.
- Wir betrachen zwei Normalformen:
  - Disjunktive Normalform (DNF): Veroderung von UND-Ausdrücken,
  - Konjunktive Normalform (KNF): Verundung von ODER-Ausdrücken.

Normalformen

Beispiel 21:

Betrachte den logischen Term $A \leftrightarrow B$. Dieser hat die

- DNF: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$,
- KNF: $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$.

DNF und KNF

Definition 22:

Sei Z ein logischer Term in Variablen $X_1, \dots, X_n$.
Z ist in *DNF*, falls

$$Z = Z_1 \vee \cdots \vee Z_k$$

wobei

$$Z_i = Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_n, \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, k$$

und jedes

$$Y_j = X_j \quad \text{oder } Y_j = \neg X_j$$

ist.

Die Definition für KNF ist analog (Vertausche $\wedge$ und $\vee$).

DNF und KNF

Beispiel 23:

$Z = (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$ ist ein Ausdruck in DNF.
$Z' = (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$ ist ein Ausdruck in KNF.

Wichtige Erkenntnis zu DNF und KNF

Satz 24:

Jeder logische Term in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ ist zu einem logischen Term in disjunktiver (konjunktiver) Normalform logisch äquivalent. Letzterer ist bis auf die Reihenfolge der Teilterme, die durch ODER (UND) verknüpft sind, eindeutig bestimmt.

Auf einen Beweis verzichten wir an dieser Stelle. Wir erhalten aber die Beweisidee aus dem nächsten Beispiel

DNF, KNF: Beispiel

Beispiel 25:

$Z = \neg((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee C))$

A	B	C	$\neg A \vee C$	$A \vee B \vee C$	$(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee C)$	Z
W	W	W	W	W	W	F
W	W	F	F	W	F	W
W	F	W	W	W	W	F
W	F	F	F	W	F	W
F	W	W	W	W	W	F
F	W	F	W	W	W	F
F	F	W	W	W	W	F
F	F	F	W	F	F	W

Beispiel (Fortsetzung)

Beispiel 25 (Fortsetzung):

$Z = \neg((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee C))$

A	B	C	Z	
W	W	W	F	
W	W	F	W	$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee$
W	F	W	F	
W	F	F	W	$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee$
F	W	W	F	
F	W	F	F	
F	F	W	F	
F	F	F	W	$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

DNF: Bilde zu jedem W den passenden UND-Term.

Beispiel (Fortsetzung)

Beispiel 25 (Fortsetzung):

$Z = \neg((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee C))$

A	B	C	Z
W	W	W	F
W	W	F	W
W	F	W	F
W	F	F	W
F	W	W	F
F	W	F	F
F	F	W	F
F	F	F	W

$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \ \wedge$

$(\neg A \vee B \vee \neg C) \ \wedge$

$(A \vee \neg B \vee \neg C) \ \wedge$

$(A \vee \neg B \vee C) \ \wedge$

$(A \vee B \vee \neg C)$

KNF: Bilde zu jedem F den passenden ODER-Term.

Beispiel 25 (Fortsetzung)

Wie sieht die DNF zu $Z = \neg((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee C))$ aus?

$$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

Wie sieht die KNF zu Z aus?

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$$

Je nachdem ob mehr W oder F in der Wahrheitstafel stehen, ist es sinnvoller, die DNF oder die KNF zu nehmen.

Logische Schließen

Nächste Vorlesung!