ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga
Aaron Lye

Mathematische Grundlagen I
WS 2017/18

Übungsblatt zu Weihnachten

Präsenzübungen

P25. a) Zeigen Sie, dass in einer Gruppe das neutrale Element und die inversen Elemente eindeutig bestimmt sind.

b) Zeigen Sie, dass für Elemente $g_1, \ldots, g_n$ einer Gruppe G gilt

$$(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdot \ldots \cdot g_1^{-1}.$$

P26. a) Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe $\mathbb{Z}_{20}^*$.

b) Stellen Sie die Multiplikationstafel für $\mathbb{Z}_{20}^*$ auf.

c) Leiten Sie aus der Multiplikationstafel die Ordnung der Gruppenelemente ab.

Bonus-Hausübungen

20% der erreichten Punkte auf diesem Blatt werden als Bonus-B-Punkte gezählt. Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungswege und kommentieren Sie bitte einzelne Lösungsschritte zumindest in Stichworten.

W1. Besuchen Sie die Webseite `http://mathekalender.de/index.php`. Suchen Sie sich eine der Aufgaben aus dem Matheon-Adventskalender aus und bearbeiten Sie diese. Geben Sie bitte an, auf welche Aufgabe Sie sich beziehen. (5 Punkte)

W2. Beim Verpacken der Geschenke vergisst der Wichtel Leopold die Geschenke zu beschriften, damit der Weihnachtsmann weiß, welches Kind welches Geschenk bekommen soll. Glücklicherweise bemerkt Leopold seinen Fehler schnell, nur vier Geschenke hat er nicht beschriftet. Schnell schreibt er die Namen der vier Kinder (Anna, Bert, Charlotte und Darius) auf die Geschenke.

a) Wieviele Möglichkeiten hat Leopold, vier Namen auf vier Geschenke zu schreiben, wobei auf jedes Geschenk genau ein Name geschrieben wird?

b) Bei wievielen dieser Möglichkeiten steht Annas Name auf dem richtigen Geschenk?

c) Bei vievielen Möglichkeiten steht wenigstens der Name eines Kindes auf dem richtigen Geschenk?

(5 Punkte)

W3. Auf seiner weiteren Route kommt der Weihnachtsmann in eine Stadt, welche die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat, wobei jede Kante 7km lang ist. In dieser Stadt muss der Weihnachtsmann 50 Häuser besuchen. Zeigen Sie, dass wenigstens zwei dieser Häuser höchstens einen Kilometer voneinander entfernt sind. (5 Punkte)

Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 09.01.2018 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.

Weitere Aufgaben
Diese Aufgaben dienen zur Selbstkontrolle und müssen nicht abgegeben werden.

1. Untersuchen Sie die folgenden inneren Verknüpfungen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auf Assoziativität, Kommutativität und Existenz von neutralen Elementen:
   a) $(m, n) \mapsto m^n$,
   b) $(m, n) \mapsto \text{kgV}(m, n)$,
   c) $(m, n) \mapsto \text{ggT}(m, n)$,
   d) $(m, n) \mapsto m + n + mn$.

2. Wann heißt eine Gruppe abelsch?

3. Geben Sie Beispiele für endliche und unendliche, abelsche und nicht-abelsche, Gruppen.

4. Zeigen Sie, dass jede Gruppe mit 4 Elementen abelsch ist.

5. Stellen Sie die Gruppentafel der S_3 auf.

6. Geben Sie die Verknüpfungstabellen für $\mathbb{Z}_3$ und und $\mathbb{Z}_6^*$ an. Was fällt Ihnen auf?

7. Sind $(G, *)$ und $(H, \circ)$ Gruppen, wie kann man dann sinnvoll auf $G \times H$ eine Gruppenstruktur definieren?