**ALTA**
**Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications**

Universität Bremen

**Dr. Tim Haga**
**Aaron Lye**

**Mathematische Grundlagen I**
**WS 2017/18**

# Übungsblatt 12

## Präsenzübungen

**P31.** Zeigen Sie, Gruppen von Index 2 sind Normalteiler.

**P32.** Bestimmen Sie die Einheiten von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

**P33.** Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Ein *Nullteiler* in $R$ ist ein Element $a \neq 0$ aus $R$, für das es ein $b \in R \setminus \{0\}$ gibt, so dass $ab = 0$ oder $ba = 0$ ist. Ein Ring ohne Nullteiler heißt *nullteilerfrei*. Ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins heißt *Integritätsring*.

Zeigen Sie:

a) In Integritätsringen gelten die Kürzungsregeln: Für alle $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ gelten

$ac = bc \;\Rightarrow\; a = b$ und

$ca = cb \;\Rightarrow\; a = b$. (5 Punkte)

b) $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn $n$ eine Primzahl ist. (5 Punkte)

c) Einheiten sind keine Nullteiler. (5 Punkte)

## Benotete Hausübung

Die Punkte dieser Aufgaben fließen in die Endnote mit ein!

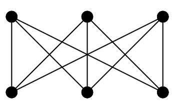
**B1. Ganze Zahlen:**

**B2.** Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 7 \\ x &\equiv 3 \pmod{11} \\ x &\equiv 7 \pmod{23}. \end{aligned}$$

(5 Punkte)

**B3. Kombinatorik:**
Bestimmen Sie die Ordnung der Automorphismengruppe des nachstehenden Graphen. (5 Punkte)



**Bitte wenden!**

**B4.** **Ringe:** Sei $R \neq \{0\}$ ein Ring mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in R$ gilt: $a^2 = a$.
Zeigen Sie:

a) $a + a = 0$ für alle $a \in R$ (2 Punkte)

b) $R$ ist kommutativ (3 Punkte)

**Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 23.01.2018 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.**

**Weitere Aufgaben**
Diese Aufgaben dienen zur Selbstkontrolle und müssen nicht abgegeben werden.

1.