ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga
Aaron Lye

Mathematische Grundlagen I
WS 2017/18

Übungsblatt 11

Präsenzübungen

P27. Sei der Homomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ mit $\varphi(1) = 2$ gegeben.

a) Bestimmen Sie Kern und Bild von φ

b) Bestimmen Sie den Index von Kern und Bild von φ.

P28. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Sei $\varphi\colon G \longrightarrow G$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $g \longmapsto g^2$ ein Homomorphismus, so ist G abelsch.

b) Ist $g \longmapsto g^{-1}$ ein Homomorphismus, so ist G abelsch.

c) Ist $\operatorname{Aut} G = \{id\}$, so ist G abelsch.

P29. Geben Sie alle Untergruppen der $\mathbb{Z}_{42}$ an.

Hausübungen

H21. Definieren Sie die prime Restklassengruppe modulo n. Betrachten Sie die Gruppen $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ für $n \in \{5, 8, 9, 12, 20\}$. Welche dieser Gruppen sind zyklisch? Geben Sie für die zyklischen Gruppen je einen Erzeuger an. (5 Punkte)

H22. Geben Sie alle Nebenklassen von $4\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ sowie in $2\mathbb{Z}$ bzgl. $+$ an. (4 Punkte)

H23. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ fest gewählt. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} c_g\colon G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass c_g die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

a) $c_g \circ c_{g'} = c_{gg'}$; (5 Punkte)

b) $c_{g^{-1}} = (c_g)^{-1}$. (5 Punkte)

Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 16.01.2018 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.

Bitte wenden!

Weitere Aufgaben
Diese Aufgaben dienen zur Selbstkontrolle und müssen nicht abgegeben werden.

1. Wie ist der Kern eines Homomorphismus defininert?
2. Wie ist das Bild eines Homomorphismus defininert?
3. Wann heißt eine (Unter-)Gruppe zyklisch?
4. Sind Untergruppen zyklischer Gruppen wieder zyklisch? Warum (nicht)?
5. Geben Sie Beispiel für zyklische Gruppen.
6. Warum sind zyklische Gruppen immer abelsch?