ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga
Aaron Lye

Mathematische Grundlagen I
WS 2017/18

Übungsblatt 9

Präsenzübungen

P22. Bestimmen Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen $1 \leq n \leq 100$, welche durch 2 oder 3 teilbar sind.

P23. Zeigen Sie, dass für jede Primzahl p gilt:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

P24. Geben sind 2 Permutationen $a, b \in S_3$ in Zweizeilenform, wie folgt:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie die Permutationen a und b in Zyklenschreibweise und berechnen Sie $a \circ b$ und $b \circ a$.

Hausübungen

Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungswege und kommentieren Sie bitte einzelne Lösungsschritte zumindest in Stichworten.
Die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ sind wie folgt definiert:

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man $\binom{n}{0} := 1$ und $\binom{n}{n} := 1$.
2. Für $k, n \in \mathbb{N}, 0 < k < n$ setzt man $\binom{n}{k} := \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Dann gilt $\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$, etc. Damit ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ definiert.

H18. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (10 Punkte)

b) Sind a, b reelle Zahlen, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(5 Punkte)

Bitte wenden!

H19. Zeigen Sie: Unter neun beliebigen natürlichen Zahlen gibt es stets zwei Zahlen a, b, so dass gilt: $8 \mid (a - b)$. (5 Punkte)

Hinweis: Schubfachprinzip

H20. Geben sind 2 Permutationen $a, b \in S_5$ in Zweizeilenform und eine $c \in S_5$ in Zyklenschreibweise wie folgt:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad c := (2\,3)(1\,4\,5).$$

a) Schreiben Sie die Permutationen a und b in Zyklenschreibweise. (4 Punkte)

b) Berechnen Sie, $a \circ b$, $c \circ b \circ a$ und $b \circ c \circ b^{-1}$. (6 Punkte)

c) Warum sind zwei Permutationen $d \in S_i, e \in S_j, i \neq j$ nicht kombinierbar? (2 Punkte)

d) Wie viele Permutationen gibt es in S_n? (1 Punkte)

Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 19.12.2017 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.

Weitere Aufgaben

Diese Aufgaben dienen zur Selbstkontrolle und müssen nicht abgegeben werden.

1. Was besagt das Schubfachprinzip?
2. Warum funktioniert das Schubfachprinzip bei unendlichen Mengen (nicht)?
3. Wie viele injektive Abbildungen gibt es von einer zehnelementigen Menge in eine zwölfelementige Menge?
4. Was besagt dass Prinzip von Inklusion-Exklusion?
5. Wieviele natürliche Zahlen $1 \leq n \leq 100$ lassen sich nicht durch 2, 3 oder 8 teilen?
6. Gilt das Prinzip von Inklusion-Exklusion auch für unendliche Mengen? Begründung?
7. Zeigen Sie, dass für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$