ALTA
Institute for Algebra, Geometry,
Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga
Aaron Lye

Mathematische Grundlagen I
WS 2017/18

Übungsblatt 7

Präsenzübungen

P16. Warum ist die Teilbarkeitsrelation keine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$?

P17. Wenden Sie den euklidschen Algorithmus an um den ggT von 96 und 60 zu berechnen.

P18. Nutzen Sie den *erweiterten* euklidischen Algorithmus, um Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ zu finden, welche die Gleichung $13a + 34b = 1$ lösen.

Benotete Hausübung

Die Punkte dieser Aufgaben fließen in die Endnote mit ein! Beachten Sie, dass es möglich ist bereits erbrachte Punkte aus den Vorjahren anrechnen zu lassen. Wenn dann aber nur vollständig und nicht nur Teilweise. Die Bearbeitung der benoteten Aufgaben mit anschließender Entscheidung, ob die Punkte des Vorjahres verwendet werden sollen, ist nicht möglich. Bei der Abgabe benoteter Aufgaben verfallen also die Punkte des Vorjahres. Für die Anrechnung bereits erbrachter Leistung schreiben Sie bitte eine E-Mail an Aaron Lye (lye@math.uni-bremen.de).

B1. Logik:
Seien A, B, C Aussagen. Stellen Sie den logischen Term $((A \to B) \land B) \to (A \land C)$ in disjunktiver und konjunktiver Normalform dar. $(2 \cdot 2{,}5$ Punkte)

B2. Relationen und Abbildungen:

a) Sei die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch $m \longmapsto 2m$.

Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv? Beweisen Sie ihre Vermutung. (2,5 Punkte)

b) Seien A und B Mengen und $f\colon A \longrightarrow B$ eine surjektive Abbildung.

Zeigen Sie: Die Relation $R \subseteq A \times A$ gegeben durch

$$x_1 R x_2 :\Leftrightarrow \exists y \in B : \{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(y)$$

ist eine Äquivalenzrelation. (2,5 Punkte)

B3. Vollständige Induktion:
Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beliebig aber fest gewählt. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: (5 Punkte)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Bitte wenden!

Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 05.12.2017 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.

Weitere Aufgaben
Diese Aufgaben dienen zur Selbstkontrolle und müssen nicht abgegeben werden.

1. Warum ist für festes $m \in \mathbb{Z}$ die Relation $aRb :\Leftrightarrow m \mid (a-b)$ eine Äquivalenzrelation? Welches sind die Äquivalenzklassen?

2. Warum gilt für $a = qb + r$, dass $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(b,r)$ ist?

3. Ist ggT auch assoziativ; d.h. gilt: $\mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b,c)) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a,b), c)$?

4. Gegeben $m \in \mathbb{Z}$. Für welche Zahlen $a \in$ ist $\mathrm{ggT}(a,m) = m$ und für welche ist $\mathrm{ggT}(a,m) = 1$.

5. Wie kann man den ggT berechnen?

6. Warum mach es (fast) keinen Unterschied, ob man den euklidischen Algorithmus mit `euklid(a,b)` *oder* `euklid(b,a)` aufruft?

7. Für welche Zahlenpaare benotigt der euklidische Algorithmus wenig Schritte, für welche benötigt er viele?

8. Worin besteht die Erweiterung in dem erweiterten euklidische Algorithmus?