ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga
Aaron Lye

Mathematische Grundlagen I
WS 2017/18

Übungsblatt 6

Am Mittwoch dem 22.11.2017 findet der diesjährige „Tag der Lehre“ statt. Dieser ist wie immer ein Dies Academicus, das heißt, dass die üblichen Lehrveranstaltungen nicht stattfinden und stattdessen alle Angehörigen der Universität die Zeit zum Austausch und für Veranstaltungen und Diskussionen zum Themenspektrum von Lehre und Studium nutzen können. Aus diesem Grund ist der Umfang der Hausübungen geringer konzipiert. Wir bitten alle Angehörigen der Universität sich die Zeit zu nehmen und an den Veranstaltungen und Diskussionen teilzunehmen.

Präsenzübungen
In der Vorlesung haben wir die ganzen Zahlen wie folgt eingeführt: Zunächst definiert man eine Relation $\sim \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ durch

$$(m,n) \sim (m',n') :\Leftrightarrow m + n' = m' + n.$$

Dies ist offenbar eine Äquivalenzrelation (machen Sie sich dies ggf. noch einmal klar). Die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$: $\left\{\overline{(m,n)} \mid m,n \in \mathbb{N}\right\}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}$ und nennen dies die Menge der ganzen Zahlen. Auf $\mathbb{Z}$ kann man die folgenden Verknüpfungen definieren:

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)} \quad \text{(Addition auf } \mathbb{Z}\text{)},$$

und

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)} \quad \text{(Multiplikation auf } \mathbb{Z}\text{)}.$$

P14. Zeigen Sie dass Kommutativgesetz der Multiplikation von ganzen Zahlen: Für alle $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)}.$$

P15. Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

Seien $k,l,m,n \in \mathbb{Z}$ und $k \neq 0$. Dann gelten:

a) Wenn $k \mid l$ und $k \mid m$ gelten, dann auch $k \mid (l+m)$.

b) Wenn $k \mid l$ und $k \mid m$ gelten, dann auch $k \mid (l-m)$.

c) Wenn $k \mid l$ gilt, dann gilt auch $k \mid ln$.

d) Sei $m \neq 0$. Dann gilt: Aus $k \mid l$ und $m \mid n$ folgt $km \mid ln$.

Bitte wenden!

Hausübungen

H13. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definiert man wie folgt die Subtraktion:

$$\overline{(a,b)} - \overline{(c,d)} := \overline{(a,b)} + \overline{(d,c)}.$$

Zeigen Sie, dass diese Subtraktion wohldefiniert ist, dass sie also unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist:

$$(a,b) \sim (a',b') \wedge (c,d) \sim (c',d') \Leftrightarrow \overline{(a,b)} - \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} - \overline{(c',d')}.$$

(10 Punkte)

H14. Der Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie besagt, dass sich jede natürliche Zahl $n > 1$ als Produkt von Primzahlen ausdrücken lässt, z.B. $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

a) Geben Sie 42 als Produkt von Primpotenzen an. (2 Punkte)

b) Sei A die Menge der Teiler von 90 und B die Menge der Teiler von 42. Geben Sie A und B explizit an. Bestimmen Sie $A \cap B$. (4 Punkte)

Weitere Aufgaben
Diese Aufgaben dienen zur Selbstkontrolle und müssen nicht abgegeben werden.

1. Warum ist die Relation $\sim \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ definiert durch $(m,n) \sim (m',n') :\Leftrightarrow m + n' = m' + n$ eine Äquivalenzrelation?
2. Warum erfüllen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ die Peano-Axiome nicht?
3. Warum ist Teilbarkeitsrelation auf den ganzen Zahlen keine Halbordnung, auf den natürlichen Zahlen aber schon?
4. Wie kann man die natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen einbetten?
5. Warum ist die Division mit Rest eindeutig?
6. Wann heißen zwei Zahlen kongruent (modolo m) zueinander?
7. Was für eine Relation ist diese Kongruenzrelation?
8. Was ist $n\mathbb{Z}$?

Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 28.11.2017 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.