ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga
Aaron Lye

Mathematische Grundlagen I
WS 2017/18

Übungsblatt 5

Präsenzübungen

P12. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon 5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

b) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum\limits_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum\limits_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

P13. Die Fibonacci-Zahlen F_n sind rekursiv definiert durch:

- Man setzt: $F_0 := 1$ und $F_1 := 1$
- Für $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ setzt man: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

a) Bestimmen Sie die ersten 6 Fibonacci-Zahlen.

b) Berechnen Sie, $2F_0 + \sum_{k=1}^{n} F_k$ für $n = 1, \ldots, 6$

c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}\colon 2F_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2}$

Hausübungen

H11. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Sei $x \in \{0, 1\}$. Zeigen Sie: $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} x = 1 \iff x = 1 \wedge n$ ungerade.

b) $\forall n \in \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 5\}\colon 2^n > n^2$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Geben Sie explizit an wo die Induktionsvoraussetzung verwendet wird.

H12. In der Vorlesung wurde das Assoziativgesetz der Multiplikation auf den natürlichen Zahlen mittels vollständiger Induktion wie folgt bewiesen.

Vollständige Induktion über n. Seien k und m fest aber beliebig gewählt.

Induktionsanfang $n = 0$: Es gilt

$$(k \cdot m) \cdot 0 = 0 = k \cdot 0 = k \cdot (m \cdot 0). \tag{1}$$

Induktionsschritt: Es gelte also $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$ für ein $n \in N$.

Bitte wenden!

Wir müssen zeigen: $(k \cdot m) \cdot S(n) = k \cdot m \cdot S(n)$.

$$\begin{aligned}
(k \cdot m) \cdot S(n) &= k \cdot m + (k \cdot m) \cdot n && (2)\\
&= k \cdot m + k \cdot (m \cdot n) && (3)\\
&= k \cdot (m + m \cdot n) && (4)\\
&= k \cdot m \cdot n + m) && (5)\\
&= k \cdot m \cdot (n + 1) && (6)\\
&= k \cdot m \cdot S(n). && (7)
\end{aligned}$$

a) Begründen Sie, warum k und m fest aber beliebig gewählt wird und nicht auch als Induktionsvariable genutzt werden.

b) Begründen Sie, die Gleichungen (1) - (7). Erläutern Sie, wie die einzelnen Umformungsschritte zustande kommen und welche Voraussetzungen benutzt werden. zurück.

Weitere Aufgaben
Diese Aufgaben dienen zur Selbstkontrolle und müssen nicht abgegeben werden.

1. Wann heißt eine Zahl a Teiler von b?
2. Was versteht man unter der Methode der vollständigen Induktion?
3. Wie lauten die Peano-Axiome?
4. Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $M \neq \mathbb{N}$, welche den Peano-Axiomen genügt.
5. Warum erfüllen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ die Peano-Axiome nicht?
6. Überlegen Sie sich Beispiele von Aussagen, die mit vollständiger Induktion bewiesen werden können.
7. Was ist der Unterschied zwischen schwacher und starker Induktion?
8. Warum ist Teilbarkeitsrelation auf den ganzen Zahlen keine Halbordnung, auf den natürlichen Zahlen aber schon?
9. Wie kann man die natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen einbetten?
10. Warum ist die Division mit Rest eindeutig?

Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 21.11.2017 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.