ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Dr. Tim Haga
Aaron Lye

Mathematatische Grundlagen I
WS 2017/18

Übungsblatt 2

Präsenzübungen

P4. Entscheiden Sie, ob die folgenden Ausdrücke Aussagen oder Aussageformen sind. Wenn es sich um eine Aussagen oder Aussageform handelt, negieren Sie sie. Begründen Sie, wenn es sich weder um eine Aussage noch um eine Aussageform handelt.

a) Alle Primzahlen sind ungerade.

b) $(x > 0) \wedge (3 < 5)$.

c) $(7 > 0) \wedge (3 < 5)$.

d) Wenn $x > 5$ ist, dann ist $y < 3$.

e) Wahr.

f) $x = -3 \implies -3$.

g) x ist durch 7 teilbar oder 3 ist eine gerade Zahl.

P5. Seien A, B, C Aussagen. Zeigen Sie:

a) $A \to B \iff (\neg A) \vee B$

b) $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$

c) $(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

P6. Finden Sie eine Verknüpfung der Aussagen A, B, C mithilfe der Operatoren $\neg, \vee$ und $\wedge$, so dass sich folgende Wahrheitstafel ergibt:

A	B	C	?
W	W	W	W
W	W	F	F
W	F	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	W	F	F
F	F	W	W
F	F	F	W

Bitte wenden!

Hausübungen

H3. a) Zeigen Sie, dass die logischen Operatoren $\wedge, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$ in gewissen Sinne überflüssig sind. D. h., geben Sie Aussagenverknüpfungen an, in denen ausschließlich die logischen Operatoren $\neg$ und $\vee$ benutzt werden, und die dieselben Wahrheitstabellen haben wie $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, und $A \leftrightarrow B$.(1 Punkt)

b) Gegeben sei die folgende Aussagenverknüpfung (NAND).

A	B	$A \otimes B$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

Zeigen Sie, dass man nur mithilfe von $\otimes$ die logischen Operatoren $\neg$ und $\vee$ (folglich auch $\wedge, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$) darstellen kann. D. h., geben Sie Aussagenverknüpfungen an, in denen nur die Verknüpfung $\otimes$ benutzt wird, und die dieselben Wahrheitstabellen haben wie $\neg A$ und $A \vee B$. (2 Punkte)

H4. Seien A, B, C Aussagen. Zeigen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen:

a) $(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ (1 Punkt)

b) $(A \oplus B) \oplus C \iff (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge C \vee ((\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge \neg C$
wobei $a \oplus b :\Leftrightarrow (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$ (1 Punkt)

H5. Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von logischen Ausdrücken und seien A, B Ausdrücke. Zeigen Sie formal die folgenden logischen Schlüsse.

a)
$$\begin{array}{ll} \mathcal{K} \cup \{A\} & P \\ \mathcal{K} \cup \{B\} & P \\ \hline \mathcal{K} \cup \{A \vee B\} & P \end{array}$$
(2 Punkte)

b) Modus ponens:
$$\begin{array}{ll} \mathcal{K} & A \\ \mathcal{K} & A \rightarrow B \\ \hline \mathcal{K} & B \end{array}$$
(3 Punkte)

Hinweis: Orientieren Sie sich an der Vorlesung. Zeigen Sie (a) wie die Fallunterscheidung und den Widerspruch und (b) wie die Kettenregel und die Contraposition. (a) darf in (b) benutzt werden.

Abgabe der Hausübungen am Freitag, 3.11.2017im Raum *GW1 HS H0070* vor Beginn der Vorlesung.

Verständnisfragen
Diese Aufgaben dienen zur Selbstkontrolle und müssen nicht abgegeben werden.

1. Was ist der Unterschied zwischen einer Aussage und einer Aussagenform?
2. Was ist ein Axiom?
3. Was sind All- und Existenzaussagen?
4. Wann heißen zwei logische Terme logisch äquivalent?
5. Wieviele Zeilen hat eine Wahrheitstabelle für einen Ausdruck in n Variablen?
6. Zeigen Sie:
   a) $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$.
   b) $(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.
   c) $(A \leftrightarrow B) \iff (A \to B) \wedge (B \to A)$.
7. Was ist eine Tautologie? Was eine Kontradiktion? Geben Sie jeweils ein Beispiel.
8. Wann ist die Aussage $A \oplus B \oplus C$ erfüllt? Verallgemeinern Sie die Aussage für n Variablen.
9. Was ist eine konjunktive Normalform (KNF), was eine disjunktive Normalform (DNF)?
10. Wie erhält man aus einem beliebigen logischen Ausdruck Z seine KNF bzw. DNF? Muss man dazu die Wahrheitstafel von Z aufstellen?
11. Wie erhält man aus einem logischen Ausdruck, der als KNF vorliegt, die entsprechende DNF? Wie geht es umgekehrt?
12. Wann ist eine Bedingung notwendig; wann ist sie hinreichend?
13. Könnte man die Widerlegungsregel (Modus tollens) $(A \to B) \wedge \neg B \implies \neg A$ auch zu $(A \to B) \wedge \neg A \implies \neg B$ umformulieren?
14. Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von logischen Ausdrücken und seien A, B Ausdrücke. Zeigen Sie formal den logischen Schluss *Reduction ad absurdum*:
$$\begin{array}{ll} \mathcal{K} & A \to B \\ \mathcal{K} & A \to \neg B \\ \hline \mathcal{K} & \neg A \end{array}$$