**ALTA**
**Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications**

Universität Bremen

**Tim Haga** **01.04.2016**

# *Klausur*

**im Modul Mathematische Grundlagen I:**

**Logik und Algebra**

**Name, Vorname:** ______________________________________________

**Matrikelnummer:** ________________________

1. Hinweis: Dieses Deckblatt wird erst auf Anweisung der Aufsichtsführenden umgeblättert. Danach beginnt die Bearbeitungszeit.
2. Bearbeitungszeit: 120 Minuten
3. Zugelassene Hilfsmittel: Keine
4. Bewertungskriterien: Insgesamt sind 70 Punkte erreichbar. Mindestanforderung: 35 Punkte, zusammen mit den benoteten Hausübungen 49 Punkte ($\widehat{=}$Note 4,0)
5. Arbeitsanweisung
   a) Name, Vorname und Matrikelnummer sind auf diesem Deckblatt einzutragen.
   b) Diese Klausur wurde maschinell gelegt. Prüfen Sie daher, ob Ihr Exemplar aus 6 Aufgaben und einer Bonusaufgabe besteht.
   c) Die Lösungen zu den Aufgaben sind auf der jeweiligen Seite und Rückseite einzutragen.
   d) Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungen.

**Viel Erfolg!**

---

**Vom Prüfenden auszufüllen!**

**Punkte / Note / Handzeichen / Datum**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | B | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

________________________________

**Aufgabe 1.** Stellen Sie den folgenden logischen Term in disjunktiver **und** konjunktiver Normalform dar.

$$\big((A \Rightarrow B) \land B\big) \Rightarrow (A \land C)$$

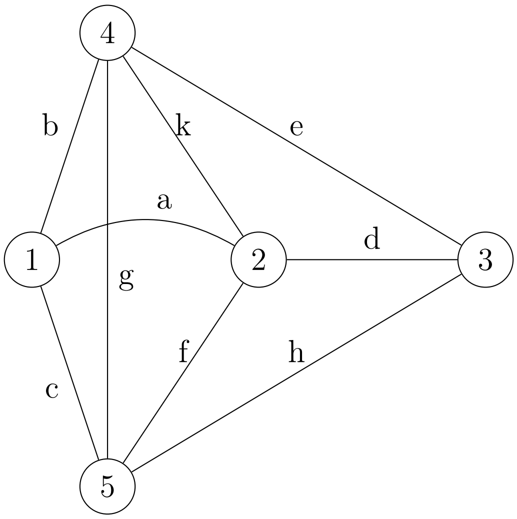
(10 Punkte)

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

$$7^{2n} - 2^n \text{ ist ohne Rest durch 47 teilbar.}$$

(10 Punkte)

**Aufgabe 3.** Es sei der folgende Graph gegeben.




a) Bestimmen Sie für jeden Knoten den Grad. (5 Punkte)

b) Beurteilen Sie, ob es für den Graphen eine Eulertour oder einen Eulerkreis gibt. Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenfalls einen entsprechenden Pfad, als Liste von zu durchlaufenden Kanten, an. (10 Punkte)

**Aufgabe 4.**

a) Sei $(G, *)$ eine Gruppe und die Abbildung $\varphi\colon G \longrightarrow G$ gegeben durch $g \longmapsto g^{-1}$. Zeigen Sie: Ist $\varphi$ ein Homomorphismus, so ist $G$ abelsch. (10 Punkte)

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_{16}^*, \cdot)$ ist zyklisch. (5 Punkte)

**Aufgabe 5.** Geben Sie eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ an. Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Abbildung tatsächlich eine Abbildung und surjektiv ist. (5 Punkte)

**Aufgabe 6.** Betrachten Sie die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}_0$, also die Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit

$$a\,R\,b \quad :\Leftrightarrow \quad a \mid b.$$

a) Zeigen Sie: $R$ ist eine Halbordnung. (5 Punkte)

b) Ist $R$ eine totale Ordnung? Warum (nicht)? (5 Punkte)

c) Geben Sie eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}_0$ an, so dass die Teilbarkeitsrelation auf $M$ (d. h. $R \cap M \times M$) zugleich Äquivalenzrelation ist. Begründen Sie ihre Antwort. (5 Punkte)

**Bonusaufgabe.** Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ gilt:

$$ac = bc \Longrightarrow a = b.$$

(10 Punkte)