ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Tim Haga

08.02.2016

Klausur

im Modul Mathematische Grundlagen I:

Logik und Algebra

Name, Vorname: ____

Matrikelnummer: ________________________

1. Hinweis: Dieses Deckblatt wird erst auf Anweisung der Aufsichtsführenden umgeblättert. Danach beginnt die Bearbeitungszeit.
2. Bearbeitungszeit: 120 Minuten
3. Zugelassene Hilfsmittel: Keine
4. Bewertungskriterien: Insgesamt sind 70 Punkte erreichbar. Mindestanforderung: 35 Punkte, zusammen mit den benoteten Hausübungen 49 Punkte ($\widehat{=}$Note 4,0)
5. Arbeitsanweisung
   a) Name, Vorname und Matrikelnummer sind auf diesem Deckblatt einzutragen.
   b) Diese Klausur wurde maschinell gelegt. Prüfen Sie daher, ob Ihr Exemplar aus 6 Aufgaben und einer Bonusaufgabe besteht.
   c) Die Lösungen zu den Aufgaben sind auf der jeweiligen Seite und Rückseite einzutragen.
   d) Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungen.

Viel Erfolg!

Vom Prüfenden auszufüllen!

Punkte / Note / Handzeichen / Datum

1	2	3	4	5	6	B	Σ

____

Aufgabe 1. Die logische Verknüpfung $\star$ sei gegeben durch die folgende Wahrheitstabelle:

A	B	$A \star B$
W	W	F
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Drücken Sie $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$ nur duch $\star$ aus. (10 Punkte)

Aufgabe 2. Seien X, Y, Z Mengen, $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ und $\psi\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Sei $\psi \circ \varphi$ surjektiv und ψ injektiv. Zeigen Sie, dass dann φ surjektiv ist. (5 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $q \neq 1$ eine beliebige, aber fest gewählte, reelle Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 4. a) Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \\ x &\equiv 5 \pmod 7 \end{aligned}$$

(10 Punkte)

b) Geben Sie ein System von zwei Kongruenzen an, welches keine Lösung besitzt. Begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

Aufgabe 5. Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{Z}_{24}, +)$.

a) Geben Sie, falls möglich, eine Untergruppe der Ordnung 10 von $\mathbb{Z}_{24}$ an, oder begründen Sie, warum es eine solche nicht geben kann. (5 Punkte)

b) Betrachten Sie die Untergruppe $U = \{[0]_{24}, [4]_{24}, [8]_{24}, [12]_{24}, [16]_{24}, [20]_{24}\}$. Bestimmen Sie die Elemente von $\mathbb{Z}_{24}/U$. (5 Punkte)

c) Handelt es sich bei $\mathbb{Z}_{24}/U$ um eine Faktorgruppe von $\mathbb{Z}_{24}$? Begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

Aufgabe 6. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Die *Charakteristik* $\operatorname{char}(R)$ von R ist die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$, so dass

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}} = 0$$

ist. Gibt es keine solche Zahl, so setzt man $\operatorname{char}(R) = 0$.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{char}(\mathbb{Z}_6[X])$. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie: Ist $R \neq \{0\}$ nullteilerfrei, so ist die Charakteristik von R entweder 0 oder eine Primzahl. (10 Punkte)

Bonusaufgabe. Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralen Element e und

$$\varphi \colon G \longrightarrow G$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{e\}$ gilt. (10 Punkte)