ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2015/16

Übungsblatt 11

Erinnerung: Sei K ein Körper, $0 \neq f \in K[X]$ ein Polynom. Dann gibt es zu jedem Polynom $g \in K[X]$ eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[X]$ mit $g = q \cdot f + r$ und $\text{grad}(r) < \text{grad}(f)$

Ein Polynom $f \in K[X]$, $f = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n$ heißt *normiert*, falls $a_n = 1$ ist.

Sind $g, h \in K[X] \setminus \{0\}$, dann heißt ein Polynom $f \in K[X]$ *größter gemeinsamer Teiler* von g und h ($\text{ggT}(g, h)$), falls f ein normiertes Polynom von maximalem Grad ist, dass g und h teilt. Die Polynome g und h heißen teilerfremd, falls $\text{ggT}(g, h) = 1$ gilt.

Den ggT zweier Polynome berechnet man analog zum ggT ganzer Zahlen mit dem euklidischen Algorithmus.

Präsenzübungen

P21. Sei R ein Ring und I, J Ideale in R. Zeigen Sie, dass dann $I \cdot J := \{a \cdot b \mid a \in I, b \in J\}$ im Allgemeinen kein Ideal ist.

P22. Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_5[X]$: $(X^6 + 3X^4 + 4X^2 + 2) : (3X^2 + 2)$

Hausübungen

H24. Sei $R \neq \{0\}$ ein Ring mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in R$ gilt: $a^2 = a$. Zeigen Sie, dass R ein kommutativer Ring ist. (5 Punkte)

H25. Seien R ein Ring und I, J Ideale in R. Zeigen Sie, dass dann auch $I \cap J$ ein Ideal in R ist. (5 Punkte)

H26. Sei K ein Körper, $\{0\} \neq I \subseteq K$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $I = K$ gilt. (5 Punkte)

Benotete Hausübung

Die Punkte dieser Aufgabe fließen in die Endnote mit ein!

B6. Seinen in $\mathbb{Z}_7[X]$ die beiden folgenden Polynome gegeben:

$$P = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$$
$$Q = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 1$$

Bestimmen Sie $\text{ggT}(P, Q)$. (5 Punkte)

Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 26.01.2016 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.