

Übungsblatt 10

Ein *Ring* $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : R \times R &\longrightarrow R & \text{und} \\ \cdot : R \times R &\longrightarrow R, \end{aligned}$$

so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe;
- (R2) \cdot ist eine assoziative Verknüpfung;
- (R3) Es gelten die Distributivgesetze:

$$\text{Für alle } x, y, z \in R \text{ gilt: } x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$$

$$\text{Für alle } x, y, z \in R \text{ gilt: } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z;$$

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *kommutativ*, falls \cdot eine kommutative Verknüpfung ist. R heißt *Ring mit Eins*, falls es bezüglich \cdot ein neutrales Element („1“ genannt) gibt. Ein Ring heißt *Körper*, falls $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei 0 das neutrale Element bezüglich $+$ ist.

Präsenzübungen

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Die bezüglich \cdot invertierbaren Elemente heißen *Einheiten*. Die Menge der Einheiten von R wird mit R^* bezeichnet.

P19. Bestimmen Sie die Einheiten von $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$.

P20. Bekannterweise ist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper. Überprüfen Sie, ob $(\mathbb{R}, \cdot, +)$ ebenfalls ein Körper ist.

Hausübungen

H22. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Zeigen Sie: (R^*, \cdot) ist eine Gruppe. (5 Punkte)

H23. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Ein *Nullteiler* in R ist ein Element $a \neq 0$ aus R , für das es ein $b \in R \setminus \{0\}$ gibt, so dass $ab = 0$ oder $ba = 0$ ist. Ein Ring ohne Nullteiler heißt *nullteilerfrei*. Ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins heißt *Integritätsring*.

Zeigen Sie:

- a) In Integritätsringen gelten die Kürzungsregeln: Für alle $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ gelten

$$ac = bc \Rightarrow a = b \text{ und}$$

$$ca = cb \Rightarrow a = b.$$

(5 Punkte)

b) $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn n eine Primzahl ist. (5 Punkte)

c) Einheiten sind keine Nullteiler. (5 Punkte)

Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 19.01.2016 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.