

Tim Haga

Mathematische Grundlagen I  
WS 2015/16

## Übungsblatt 9

Sind  $(G, *)$  und  $(H, \circ)$  Gruppen, dann heißt  $\varphi: G \rightarrow H$  (*Gruppen-*)*Homomorphismus*, falls für alle  $g, h \in G$  gilt:  $\varphi(g * h) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$ . Ist  $G = H$  und  $\varphi$  bijektiv, so heißt  $\varphi$  *Automorphismus*.

### Präsenzübungen

**P14.** Geben Sie alle Untergruppen von  $\mathbb{Z}_{20}$  an.

**P15.** Seien  $G, H$  Gruppen,  $\varphi: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

- a)  $\varphi(e_G) = e_H$  und
- b)  $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ .

### Hausübungen

Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungswege und kommentieren Sie bitte einzelne Lösungsschritte zumindest in Stichworten.

**H19.** Sei  $(G, *)$  eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ist ein Automorphismus. (6 Punkte)

**H20.** Sei  $G$  eine Gruppe,  $g \in G$  und

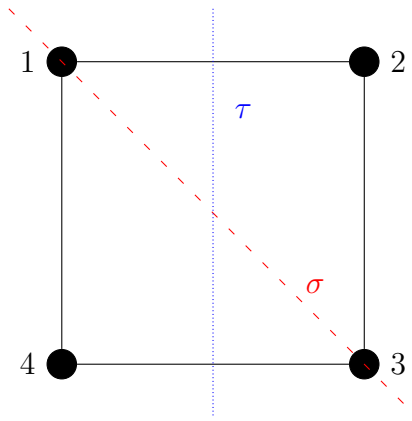
$$\begin{aligned} c_g: G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

der Konjugationshomomorphismus. Zeigen Sie, dass  $c_g$  die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

- a)  $c_g \circ c_{g'} = c_{gg'}$ ; (4 Punkte)
- b)  $c_{g^{-1}} = (c_g)^{-1}$ . (4 Punkte)

**H21.** Sei  $D_4$  die Symmetriegruppe des Quadrats mit Eckenmenge  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

**Bitte wenden!**



Sei  $g$  die Drehung des Quadrats um den Mittelpunkt um  $90^\circ$  entgegen dem Uhrzeigersinn. Weiterhin sei  $\sigma$  die Spiegelung entlang der Diagonalen durch die Ecken 1 und 3 und  $\tau$  die Spiegelung an der senkrechten Symmetrieachse.

Bestimmen Sie für folgende Untergruppen  $U_k$  die konjugierte Untergruppe  $gU_kg^{-1}$  und leiten Sie daraus ab, ob  $U_k$  Normalteiler ist:

- a)  $U_1 = \langle g \rangle$  (dies ist die Gruppe der Drehungen des Quadrats), (2 Punkte)
- b)  $U_2 = \langle \sigma \rangle = \{e, \sigma\}$  (2 Punkte)
- c)  $U_3 = \langle \tau \rangle = \{e, \tau\}$  (2 Punkte)

**Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 15.12.2015 im Raum NW1 H1 H0020 vor Beginn der Vorlesung.**