ALTA
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications

Universität Bremen

Tim Haga

Mathematische Grundlagen I
WS 2015/16

Übungsblatt 8

Eine Gruppe $(G, *)$ ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $*\colon G \times G \Rightarrow G$, so dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(GA1) **Assoziativität**: Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ, d. h. es gilt $g*(h*k) = (g*h)*k$ für alle $g, h, k \in G$.

(GA2) **Existenz eines neutralen Elements**: Es gibt ein Element $e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt: $e * g = g = g * e$.

(GA3) **Existenz der inversen Elemente**: Zu jedem Element $g \in G$ gibt es ein $h \in G$, mit $h * g = e = g * h$.

Präsenzübungen

P12. Bestimmen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe des Quadrats mit Kantenlänge 1, also der Gruppe aller Spiegelungen und Drehungen, die das Quadrat wieder auf sich selbst abbilden.

P13. Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass $(G, *)$ abelsch ist.

Die Anzahl der Elemente einer Gruppe G nennt man Ordnung der Gruppe und schreibt dafür $|G|$.

Hausübungen

Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Lösungswege und kommentieren Sie bitte einzelne Lösungsschritte zumindest in Stichworten.

H17. Zeigen Sie die folgende Aussage:

Sei G eine nichtleere Menge mit einer Verknüpfung $*$ gegeben. $(G, *)$ ist eine Gruppe, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(GA1') **Assoziativität**: Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ, d. h. es gilt $g * (h * k) = (g * h) * k$ für alle $g, h, k \in G$.

(GA2') **Existenz eines linksneutralen Elements**: Es gibt ein Element $e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt: $e * g = g$.

(GA3') **Existenz der linksinversen Elemente**: Zu jedem Element $g \in G$ gibt es ein $h \in G$, mit $h * g = e$.

Bitte wenden!

(8 Punkte)

H18. Zeigen Sie: Alle Gruppen der Ordnung 4 sind abelsch. (7 Punkte)

Benotete Hausübung
Die Punkte dieser Aufgabe fließen in die Endnote mit ein!

B5. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Zeigen Sie

a) Sind e und f beides neutrale Elemente, so folgt $e = f$. (2 Punkte)

b) Sind h und k beides inverse Elemente zu g, so folgt $h = k$. (3 Punkte)

Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 08.12.2015 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.