**ALTA**
**Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications**

Universität Bremen

**Tim Haga**

**Mathematische Grundlagen I**
**WS 2015/16**

# Übungsblatt 5

## Präsenzübungen

Möchte man eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ beweisen, so nutzt man die Methode der vollständigen Induktion:

1. Man zeigt: $A(n_0)$ ist wahr, dass heißt, die Aussage gilt für die Zahl $n_0$. Oft ist $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$, dies muss aber nicht sein.
2. Man zeigt: $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \colon A(n) \Rightarrow A(n+1)$, dass heißt, unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ wahr ist, zeigt man, dass $A(n+1)$ wahr ist.

Den ersten Schritt nennt man *Induktionsanfang*. Im zweiten Schritt setzt man $A(n)$ voraus und nennt dies *Induktionsvoraussetzung*. Den Schritt von $A(n)$ nach $A(n+1)$ nennt man *Induktionsschritt* oder *Induktionsschluss*.

Eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ heißt *Teiler* von $b \in \mathbb{Z}$ (man sagt auch $a$ teilt $b$ oder $b$ ist durch $a$ teilbar und schreibt $a \mid b$), falls es eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $ac = b$ gilt.

**P9.** Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon 5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

b) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i-1) = 2n^2 + n$

## Hausübungen

Sei $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit 0. Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl $n$ ist definiert durch $n! \coloneqq 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Außerdem definiert man $0! \coloneqq 1$.

Die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ sind wie folgt definiert:

1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzt man $\binom{n}{0} \coloneqq 1$ und $\binom{n}{n} \coloneqq 1$.
2. Für $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ setzt man $\binom{n}{k} \coloneqq \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Dann gilt $\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$, etc. Damit ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ definiert.

**H10.** Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (10 Punkte)

**Bitte wenden!**

b) Sind $a, b$ reelle Zahlen, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(5 Punkte)

**Benotete Hausübung**

Die Punkte dieser Aufgabe fließen in die Endnote mit ein!

Die Fibonacci-Zahlen $F_n$ sind rekursiv definiert durch:

1. Man setzt: $F_0 := 1$ und $F_1 := 1$
2. Für $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ setzt man: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

**B3.** Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2F_0 + \sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2}$$

(5 Punkte)

**Abgabe der Hausübungen am Dienstag, 17.11.2015 im Raum *NW1 H1 H0020* vor Beginn der Vorlesung.**