

Funktionalanalysis

WS 2009/10 — Übung 12 — 26.01.2010

Abgabe: 02.02.2010

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. J. Montalvo Urquizo
Sebastian Thomas

Bonusaufgabe

Aufgabe 32

(6 Punkte)

Sei X ein separabler Hilbertraum mit Dimension $\dim(X) = \infty$. Zeigen Sie:

- a) Es existieren $e_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, mit $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ und für alle $x \in X$ gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$$

(X besitzt damit ein abzählbares *vollständiges Orthonormalsystem*).

- b) Es gibt eine bijektive Abbildung $T \in L(X, l^2)$ mit

$$(Tx, Ty)_{l^2} = (x, y)_X \quad \text{für alle } x, y \in X,$$

damit ist X isomorph zu l^2 .

Tip zu a): setze das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren geeignet ein.