Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. A. Luttmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 12 — 22.01.2019
Abgabe: 29.01.2019

Aufgabe 26 (Stefan-Problem) (8 Punkte)
Die Wärmeleitung mit Phasenübergang fest-flüssig wird durch das Stefan-Problem beschrieben. Es beschreibt die Veränderung von Energiedichte u und Temperatur θ:

$$\dot{u}(x,t) - \Delta\theta(x,t) = f(x,t) \quad \text{in } \Omega \times (0,T)$$

mit Anfangswerten für $u(.,0)$ und geeigneten Randwerten, z. B. Dirichlet-Werten für die Temperatur. Dabei sind Energiedichte und Temperatur über eine nichtlineare, monotone Funktion β miteinander gekoppelt:

$$\theta(x,t) = \beta(u(x,t)).$$

Im einfachsten Fall ist

$$\beta(u) = \min(u,0) + \max(u-1,0),$$

siehe auch Aufgabe 1d.
Eine Finite-Elemente-Diskretisierung kann mit stückweise linearen FE-Funktionen mit diskretem Raum X_h durchgeführt werden. Seien dann $u_h^k, \theta_h^k \in X_h$ die diskreten Lösungen zum Zeitpunkt t_k. Diskrete Energiedichte und Temperatur seien über die Vorschrift

$$\theta_h^k = I_h \beta(u_h^k)$$

miteinander verbunden, wobei I_h die Langrange-Interpolation in X_h bezeichne.

a) Stellen Sie das diskrete nichtlineare Gleichungssystem für eine schwache Formulierung des Gleichungssystem beim impliziten Euler-Verfahren auf.

b) Zur Lösung des nichtlinearen Zeitschrittproblems kann ein Gauß-Seidel-Verfahren genutzt werden. Leiten Sie eine Berechnungsvorschrift für den i-ten Koeffizienten von u_h^{k+1} und θ_h^{k+1} in einer Gauß-Seidel-Iteration her.