Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. A. Luttmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 11 — 15.01.2019
Abgabe: 22.01.2019

Aufgabe 24 (Zur Konvergenz der adaptiven Methode) (6 Punkte)

a) Sei X ein Hilbertraum und B eine stetige, koerzive symmetrische Bilinearform auf X und $\|v\|_B^2 = B(v,v)$ die durch das Skalarprodukt B induzierte Norm. Seien X_H und X_h vollständige Unterräume mit $X_H \subset X_h \subset X$.

Zu einem $f \in X'$ sei $u \in X$ die Lösung von

$$B(u,v) = f(v) \qquad \text{für alle } v \in X$$

sowie $u_h \in X_h$ und $u_H \in X_H$ die entsprechenden Lösungen der Unterraum-Probleme.

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\|u - u_h\|_B^2 = \|u - u_H\|_B^2 - \|u_H - u_h\|_B^2$$

b) Sei $\mathcal{S}_H$ eine zulässige Triangulierung von Ω und $\mathcal{S}_h$ eine zulässige Verfeinerung von $\mathcal{S}_H$. Zeigen Sie, dass dann die entsprechenden Finite-Elemente-Räume mit stückweise polynomialen Funktionen (X_H zu $\mathcal{S}_H$, X_h zu $\mathcal{S}_h$) erfüllen

$$X_H \subset X_h \subset X = H^1(\Omega).$$

c) Zeigen Sie: Wenn die Verfeinerung der Gitter in der adaptiven Methode so gemacht werden kann, dass für ein festes $\theta > 0$ in jeder Iteration (mit $u_k \in X_k \subset X_{k+1}$) gilt

$$\|u_{k+1} - u_k\|_B^2 \geq \theta \|u - u_k\|_B^2,$$

so konvergiert der Fehler $\|u - u_h\|$ mindestens mit linearer Rate gegen Null, d.h. es gibt ein $\alpha < 1$ so dass

$$\|u - u_k\|_B^2 \leq \alpha^k \, \|u - u_0\|_B^2.$$

Aufgabe 25 (6 Punkte)

Die 1D-Wärmeleitungsgleichung auf $\Omega = (0,1)$ mit homogener Dirichlet-Randbedingung sei im Ort mit einer P_1-Finite-Elemente-Methode mit Gitterweite $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, diskretisiert. Die zugehörige diskrete Laplace-Matrix sei mit A_h bezeichnet. Mit der Diagonalmatrix $M_h := diag(\int_\Omega \varphi_i)_i = hI$ sei die Massematrix $(\varphi_i, \varphi_j)_{ij}$ approximiert. Bezeichnet $\mathbf{u}(t)$ den Koeffizientenvektor zur Zeit t, dann approximieren wir die Wärmeleitungsgleichung durch

$$M_h \dot{\mathbf{u}}(t) + A_h \mathbf{u}(t) = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

a) Zeigen Sie, dass die Systemmatrix für dieses System von gewöhnlichen Differentialgleichungen die Eigenvektoren v_i mit

$$v_{i,j} = \sin(ijh\pi) \qquad i,j = 1, ..., N,$$

besitzt und berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

b) Welche Restriktion an die Zeitschrittweite ergibt sich dadurch für das explizite Euler-Verfahren zur Approximation des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen?