Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. A. Luttmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 10 — 08.01.2019
Abgabe: 15.01.2019 — Abgabe Programmieraufgabe: 22.01.2019

Aufgabe 23 (Zur Effizienz des Fehlerschätzers) (6 Punkte)
Zu einem nicht degenerierten d-Simplex $S \subset \mathbb{R}^d$ definiere das Polynom $\psi_S \in \mathbb{P}_{d+1}(S)$ durch

$$\psi_S(x) = (d+1)^{d+1} \prod_{i=0}^{d} \lambda_i(x),$$

wobei λ_i die baryzentrischen Koordinaten zu S sind.
Zu vorgegebenem $k \geq 1$ sei $\varphi \in \mathbb{P}_k(S)$. Zeigen Sie die Abschätzungen:

a) $\|\sqrt{\psi_S}\varphi\|_{L^2(S)} \;\geq\; c\|\varphi\|_{L^2(S)}$,

b) $\|\psi_S\varphi\|_{L^2(S)} \;\leq\; \|\varphi\|_{L^2(S)}$,

c) $\|\nabla(\psi_S\varphi)\|_{L^2(S)} \;\leq\; c\,\dfrac{1}{h(S)}\|\varphi\|_{L^2(S)}$.

Programmieraufgabe 4 (12 Punkte)
Verwenden Sie in FEniCS Fehlerschätzer und adaptive Methoden, um die folgenden Probleme zu bearbeiten:

a) Lösen Sie mit Ihrem Programm das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad\qquad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u(x) &= \exp(-10|x|^2). \end{aligned}$$

b) Lösen Sie mit Ihrem Programm das Dirichlet-Problem (vgl. Programmieraufgabe 3 b):

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega = (-1,1)^2 \setminus ([0,1]\times[-1,0]), \\ u(r\cos\phi, r\sin\phi) &= r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right) \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Testen Sie jeweils den Fehlerschätzer $\eta := \sqrt{\sum_S \eta_S^2}$ gegenüber dem exakten Fehler $|u-u_h|_{H^1(\Omega)}$ und wählen Sie die Konstanten in den Fehlerindikatoren so, dass beide etwa gleich groß sind.
Verwenden Sie global verfeinerte Gitter sowie adaptiv verfeinerte Gitter mit der vorgegebenen Markierungs-Strategie (Dörfler) und iterieren Sie so lange, bis eine vorgegebene Fehler-Toleranz erreicht ist. Stellen Sie jeweils den (geschätzten) Fehler gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade dar (am besten in log-log-Skalen).
Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse für die Fälle a) und b).