

## Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 9 — 18.12.2018

Abgabe: 08.01.2019

### Das Neumann-Problem für die Poisson-Gleichung

Sei im folgenden  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \leq 3$ ) ein beschränktes, polygonales Gebiet.

#### Aufgabe 20

(6 Punkte)

Sei  $u \in H^2(\Omega)$  Lösung des Neumann-Problems

$$(N) : \quad -\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie: Dann gilt

$$\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0$$

und zwei Lösungen  $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$  unterscheiden sich nur um eine Konstante, d.h.  $\exists c \in \mathbb{R} : u_1 = u_2 + c$ . Sei  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  mit der Norm  $\|v\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} := \inf_{c \in \mathbb{R}} \|v + c\|_{H^1(\Omega)}$  versehen. Zeigen Sie weiterhin: Zu jedem Paar  $(f, g) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  mit  $\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0$  gibt es genau eine schwache Lösung des Neumann-Problems (N), d.h. genau ein  $u \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi + \int_{\partial\Omega} g \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}.$$

#### Aufgabe 21

(4 Punkte)

Sei  $\mathcal{S}$  eine zulässige Triangulierung von  $\Omega$  und  $X_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_S \in \mathbb{P}_1 \forall S \in \mathcal{S}\}$ . Seien  $f \in L^2(\Omega), g \in H^1(\Omega)$  mit  $\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0$ . Zeigen Sie: Dann gibt es genau eine Lösung  $u_h \in X_h$  mit  $\int_{\Omega} u_h = 0$  des diskreten Problems

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla \varphi_h = \int_{\Omega} f \varphi_h + \int_{\partial\Omega} g \varphi_h \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

Falls zusätzlich  $u \in H^2(\Omega)$ , dann gibt es ein  $c > 0$  so dass

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c h |u|_{H^2(\Omega)}.$$

#### Aufgabe 22

(4 Punkte)

Zeigen Sie: Ersetzt man im diskreten Problem aus Aufgabe 21 die Funktion  $g$  durch

$$g_h := Ig - \frac{1}{|\Omega|} \left( \int_{\partial\Omega} Ig + \int_{\Omega} f \right),$$

so gilt für  $g \in H^2(\Omega)$  die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h (|u|_{H^2(\Omega)} + |g|_{H^2(\Omega)}).$$

Dabei ist  $Ig \in X_h$  die Interpolierende zu  $g$ .

**Frohe Weihnachten  
und alles Gute und viel Erfolg  
fürs neue Jahr!**



[Peter Gaymann]