Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. A. Luttmann

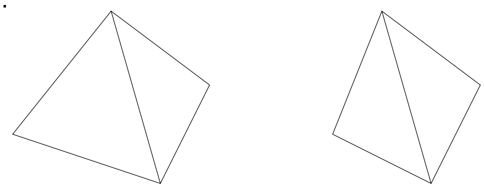
Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 8 — 11.12.2018
Abgabe: 18.12.2018

Aufgabe 17 (6 Punkte)
Zum diskreten Maximumprinzip für lineare Finite Elemente Funktionen
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zulässig trianguliert durch $\mathcal{S}$ und $(\varphi_i)_{i=1,\dots,N}$ die Knotenbasis zu den stückweise linearen Finiten Elementen auf $\mathcal{S}$. Zeigen Sie: Wenn gelten soll

$$\int_\Omega \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j \leq 0 \qquad \forall\, i \neq j$$

dann muss die Triangulierung $\mathcal{S}$ *schwach spitz* sein, d.h. für je zwei benachbarte Dreiecke $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ mit gemeinsamer Kante $E = S_1 \cap S_2$ darf die Summe der beiden Winkel in S_1, S_2 gegenüber E nicht größer als 180° sein.



Links: schwach spitze Triangulierung, rechts: nicht schwach spitz

Aufgabe 18 (L^2-Projektion) (4 Punkte)
Es sei $\mathcal{S}$ eine konforme und nicht degenerierte Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $X_h = \{v_h \in L^2(\Omega) \ : \ v_h|_{\mathring{S}} \in \mathbb{P}_k(\mathring{S})$ für alle $S \in \mathcal{S}\}$.
Zeigen Sie: Zu jedem $u \in L^2(\Omega)$ gibt es genau ein $u_h \in X_h$, so dass

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt. u_h ist die eindeutige Lösung von $\int_\Omega u_h \varphi_h = \int_\Omega u \varphi_h \quad \forall \varphi_h \in X_h$. Außerdem gibt es ein $c > 0$ so dass für $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c\, h(\mathcal{S}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{mit } h(\mathcal{S}) = \max_{S \in \mathcal{S}} h(S).$$

Aufgabe 19 (Anisotrope Rechteck-Elemente) (6 Punkte)
Es seien $\hat{R} = (0,1)^d$ der d-dimensionale Einheitswürfel und R ein achsenparalleler Quader, affin äquivalent zu $\hat{R}$ mit der Abbildung

$$F : \hat{R} \to R, \quad F(y) = Ay + b, \quad A = \mathrm{diag}(h_1, \dots, h_d).$$

a) Zeigen Sie, dass mit $m \in \mathbb{N}_0$ für $|\alpha| \leq m$, $v \in H^m(R)$ und $\hat{v} := v \circ F$ gilt:

$$\|D^\alpha \hat{v}\|_{L^2(\hat{R})} = h^{\alpha - \frac{1}{2}} \|D^\alpha v\|_{L^2(R)}.$$

Dabei bezeichnet $h^{\alpha-\frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^{d} h_i^{\alpha_i - \frac{1}{2}}$.

b) Sei $\mathbb{P}(\hat{R})$ ein endlichdimensionaler Funktionenraum auf $\hat{R}$ und $\mathbb{P}(R)$ der auf R transformierte Raum. Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante $c > 0$ gibt so dass für alle $p \in \mathbb{P}$ und $i = 1, \dots, d$ gilt:

$$\Big\| \frac{\partial p}{\partial x_i} \Big\|_{L^2(R)} \leq c \frac{1}{h_i} \|p\|_{L^2(R)}.$$