Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. A. Luttmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 7 — 04.12.2018
Abgabe: 11.12.2018

Aufgabe 14 (6 Punkte)

a) Sei $\hat{S}$ der zweidimensionale Einheitssimplex und $\hat\varphi_0, \hat\varphi_1, \hat\varphi_2$ seien die linearen Polynome mit $\hat\varphi_i(\hat a_j) = \delta_{i,j}$, $i,j = 0,1,2$. Berechnen Sie

$$\left(\int_{\hat S} \nabla \hat\varphi_i(\hat x) \cdot \nabla \hat\varphi_j(\hat x)\, d\hat x \right)_{i,j=0,1,2}.$$

b) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{S}$ eine nicht degenerierte Triangulierung von Ω. S sei ein Dreieck der Triangulierung mit Eckpunkten a_0, a_1, a_2 und $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ seien die linearen Funktionen mit $\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j}$, $i,j = 0,1,2$. Berechnen Sie mit Hilfe der affin linearen Transformation $F_S : \hat S \to S$ und a) die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\left(\int_{S} \nabla \varphi_i(x) \cdot \nabla \varphi_j(x)\, dx \right)_{i,j=0,1,2}.$$

Aufgabe 15 (3 Punkte)

Sei $\hat I = [0,1]$ der 1-dimensionale Einheitssimplex mit baryzentrischen Koordinaten $\hat\lambda_0(\hat x), \hat\lambda_1(\hat x)$. Sei weiter $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_{\hat I} \lambda_0(\hat x)^{\alpha_0} \lambda_1(\hat x)^{\alpha_1}\, d\hat x = \frac{\alpha_0! \alpha_1!}{(\alpha_0 + \alpha_1 + 1)!}.$$

Tip: Partielle Integration.

Aufgabe 16 (3 Punkte)

Sei S ein d-Simplex im $\mathbb{R}^d$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_d(x)$. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d+1}$

$$\int_S \lambda^\alpha(x)\, dx = \frac{\alpha!\, d!}{(|\alpha| + d)!} |S|$$

gilt. Dabei ist $\lambda^\alpha = \lambda_0^{\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \lambda_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_d$ und $\alpha! = \alpha_0! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!$.
Tipp: Aufgabe 15 und Induktion über d.