Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. A. Luttmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 6 — 27.11.2018
Abgabe: 04.12.2018 — Abgabe Programmieraufgabe: 18.12.2018

Aufgabe 12 (3 Punkte)

Es sei $I = (0,1)$ und f sei gegeben durch

$$f(\varphi) = \varphi(\frac{1}{2}) \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(I).$$

Bemerkung: Es gilt (in 1D !), dass $f \in H^{-1}(I)$.

Bestimmen Sie die schwache Lösung $u \in H_0^1(I)$ von

$$-u'' = f, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Aufgabe 13 (6 Punkte)

Sei S ein nicht entartetes d-dimensionales Simplex im $\mathbb{R}^d$ mit Eckpunkten $a_0, \ldots, a_d$, und $\hat{S}$ der d-dimensionale Einheitssimplex.

Zeigen Sie: Es gibt genau eine affine Abbildung $F_S : \hat{S} \to S$, $F_S(\hat{x}) = A\hat{x} + b$ mit einer $d \times d$-Matrix A, $\det A \neq 0$, und einem $b \in \mathbb{R}^d$ so dass $F_S(e_j) = a_j, j = 0, \ldots, d$. Außerdem gelten die Abschätzungen

$$|A| \leq \frac{h(S)}{\rho(\hat{S})}, \qquad |A^{-1}| \leq \frac{h(\hat{S})}{\rho(S)}$$

und

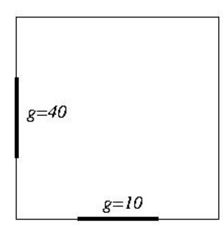
$$|\det A| = \frac{|S|}{|\hat{S}|}, \qquad c(d)\rho(S)^d \;\leq\; |\det A| \;\leq\; c(d)h(S)^d$$

mit einer nur von der Dimension d abhängigen Konstante c.

Programmieraufgabe 3 (12 Punkte)

Arbeiten Sie sich in die Löung von stationären elliptischen Problemen mit der Finite-Elemente-Methode mit FEniCS ein und bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben (vgl. Programmieraufgaben 1, 2):

a) Berechnen Sie die stationäre Wärmeverteilung in einem quadratischen Raum $\Omega = (0,1)^2$ ohne innere Wärmequelle (also mit $f = 0$) mit den folgenden Temperaturrandwerten:



Im Bereich $(0.3, 0.7) \times \{0\}$ befindet sich ein Fenster, dort gilt $g = 10$, im Bereich $\{0\} \times (0.3, 0.7)$ befindet sich eine Heizung, dort gilt $g = 40$, an allen anderen Randpunkten ist $g = 20$.

b) Lösen Sie mit Ihrem Programm das Problem (vgl. Aufgabe 3, dort u_α mit $\alpha = 1.5$):

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega = (-1,1)^2 \setminus ([0,1] \times [-1,0]), \\ u(r\cos\phi, r\sin\phi) &= r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right) \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Welche Konvergenzraten (H^1-Norm bzw. L_2-Norm) beobachten Sie?