Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. A. Luttmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 5 — 20.11.2018
Abgabe: 27.11.2018

Aufgabe 9 (6 Punkte)
Auf dem Raum $X = \{v \in C^1[0,1],\ v(0) = 0\}$ sei das Funktional

$$E(v) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 p(x)v'(x)^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)v(x)^2dx - \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

gegeben mit $p, q, f \in C[0,1]$.

- Stellen Sie die schwache Form der Eulergleichung zu E auf, d.h. welche Gleichung gilt für eine Lösung $u \in X$ des Minimierungsproblems $E(u) = \inf_{v\in X} E(v)$?
- Stellen Sie die starke Form der Eulergleichung zu E auf (falls $u \in C^2(0,1)$ und $p \in C^1[0,1]$). Welche Randbedingung für u gilt in $x = 1$?

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Wir schreiben $u^+(x) = \max(u(x), 0)$ und $u^-(x) = \min(u(x), 0)$. Zeigen Sie, dass für $u \in H^1(\Omega)$ gilt: $u^+, u^-, |u| \in H^1(\Omega)$ und

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} & u > 0, \\ 0 & u \le 0, \end{cases} \qquad \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & u \ge 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} & u < 0, \end{cases} \qquad \frac{\partial |u|}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} & u > 0, \\ 0 & u = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i} & u < 0. \end{cases}$$

Tip: Definiere $f_\varepsilon(s) := \begin{cases} \sqrt{s^2+\varepsilon^2} - \varepsilon & s > 0, \\ 0 & s \le 0 \end{cases}$ und wenden Sie die folgende **Kettenregel für Sobolev-Funktionen** an:

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\sup |f'| \le M < \infty$ und $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann ist $f \circ u \in H^1(\Omega)$ und

$$\frac{\partial (f\circ u)}{\partial x_i} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \dots, d.$$

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Beweisen Sie das folgende Maximumprinzip:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, und $u \in H^1_0(\Omega)$ schwache Lösung des Problems

$$-\Delta u + c\,u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit $f \in L^2(\Omega)$ und $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \ge 0$, d.h.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + c\,u\,\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Dann gilt: Ist $f \le 0$, so ist auch $u \le 0$.

Tip: Testen der Gleichung mit u^+, vgl. Aufgabe 10.