Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. A. Luttmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 4 — 13.11.2018
Abgabe: 20.11.2018 — Abgabe Programmieraufgabe: 27.11.18

Aufgabe 8 (8 Punkte)
Sei $Lu = -a\Delta u + b \cdot \nabla u + cu$ mit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \geq 0$ und u die Lösung des Dirichlet-Problems im beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} Lu &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

a1) Bestimmen Sie für $b = \binom{0}{0}$ eine Differenzenapproximation L_h zu L und zeigen eine Konsistenzabschätzung analog Lemma 3.8 der Vorlesung.

a2) Bestimmen Sie für $b = \binom{10}{1}$ eine geeignete Differenzenapproximation L_h zu L und zeigen eine Konsistenzabschätzung analog Lemma 3.8 der Vorlesung.

b) Zeigen Sie für beide Fälle ein diskretes Maximum-Prinzip für L_h: Ist $L_h u_h \leq 0$ in Ω_h und nimmt u_h ein *nichtnegatives* Maximum in $p_{ij} \in \mathring{\Omega}_h$ an, dann ist u_h konstant auf $\mathring{\Omega}_h \cup \mathring{\Gamma}_h^*$.

c) Zeigen Sie für beide Fälle eine Fehlerabschätzung für $\|u - u_h\|$ analog Satz 3.10 der Vorlesung für den Fall $u \in C^4(\bar{\Omega})$ und $\Gamma_h \subset \partial\Omega$.

Programmieraufgabe 2 (12 Punkte)
Erweitern Sie das Programm aus Programmieraufgabe 1 zur Lösung des Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset (A,B)^2, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

auf einem nicht-rechteckigen Gebiet Ω. Dieses sei durch eine Funktion $\Phi(x)$ beschrieben so dass $\Omega = \{x \in (A,B)^2 : \Phi(x) > 0\}$.

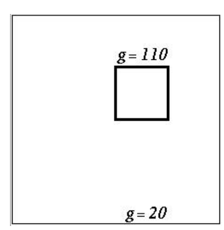
a) Welche Konvergenzraten beobachten Sie für die exakte Lösung aus Programmieraufgabe 1a auf dem Kreis mit Radius 0.8 um den Ursprung (z.B. mit $\Phi(x) = 0.8 - |x|$)?
Beachten Sie die Diskretisierung der Dirichlet-Randwerte: $g_h(p_{ij}) = g(p)$ mit $p \in \partial\Omega$, $|p - p_{ij}| < h$.

b) Lösen Sie mit Ihrem Programm das Problem (vgl. Aufgabe 3, dort u_α mit $\alpha = 1.5$):

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega = (-1,1)^2 \setminus ([0,1] \times [-1,0]), \\ u(r\cos\phi, r\sin\phi) &= r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right) \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Welche Konvergenzraten beobachten Sie hier?

c) Berechnen Sie die stationäre Wärmeverteilung in einem quadratischen Raum mit eingebautem Saunaofen, so dass $\Omega = (0,1)^2 \setminus [0.50, 0.75]^2$, ohne innere Wärmequelle (also mit $f = 0$) mit den folgenden Temperaturrandwerten: Am Rand des Ofens ist die Temperatur gleich $g = 110$, an den Wänden gilt $g = 20$.



d) Berechnen Sie die Wärmeverteilung aus c) bei einem zusätzlichen Konvektionsterm

$$-\Delta u + b \cdot \nabla u = f \quad \text{in } \Omega \qquad \text{mit } b(x) = \max\left(0, 40 \sin\left(6\left|x - \begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}\right|\right)\right)\begin{pmatrix}0.5 - x_2\\x_1 - 0.5\end{pmatrix}.$$