

## Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 3 — 06.11.2018

Abgabe: 13.11.2018

### Aufgabe 5 (4 Punkte)

Konstruieren Sie einen „einseitigen“ Differenzenoperator für die zweite Ableitung  $u''(x)$  einer glatten Funktion  $u$  durch Verwendung der Gitterpunkte  $x$ ,  $x + h$ ,  $x + 2h$  und  $x + 3h$ , so dass ein Restterm der Ordnung  $O(h^2)$  entsteht.

Wie glatt muss die Funktion  $u$  dafür sein?

### Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeigen Sie die Konsistenzabschätzung auf einem nicht-äquidistanten Gitter:

a) Für  $u \in C^4[x - h_l, x + h_r]$  gilt

$$\left| -u''(x) - \frac{2}{h_l + h_r} \left( \frac{u(x) - u(x + h_r)}{h_r} + \frac{u(x) - u(x - h_l)}{h_l} \right) \right| \leq C(h_l + h_r).$$

b) Falls für eine Konstante  $K$  gilt dass  $h_l \leq h_r(1 + Kh_r)$  und  $h_r \leq h_l(1 + Kh_l)$ , so folgt

$$\left| -u''(x) - \frac{2}{h_l + h_r} \left( \frac{u(x) - u(x + h_r)}{h_r} + \frac{u(x) - u(x - h_l)}{h_l} \right) \right| \leq C(h_l^2 + h_r^2).$$

Ein solches Gitter heißt *lokal äquidistant*.

### Aufgabe 7 (Zur Kondition der Systemmatrix bei Differenzenverfahren) (8 Punkte)

Sei  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$  und wir betrachten das homogene Dirichlet-Problem

$$-u'' = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Zu  $N \in \mathbb{N}$  sei  $h = \frac{1}{N}$  und  $\Omega_h = \{a_i = ih, 0 \leq i \leq N\}$  das äquidistante Gitter.

a) Zeigen Sie, dass die Gitterfunktionen

$$v_k(a_i) = \sin(k\pi a_i), \quad i = 0, \dots, N$$

für  $k = 1, \dots, N - 1$  Eigenfunktionen des diskreten 1D-„Laplace-Operators“ sind,

d. h.  $-\Delta_h v_k = \lambda_k v_k$  und  $v_k = 0$  auf  $\Gamma_h$ . Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_k$ .

b) Berechnen Sie die Kondition der reduzierten Systemmatrix des Dirichlet-Problems.

Wie verhält sich die Kondition bei Halbierung der Gitterweite?

c) Schätzen Sie damit die Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahrens zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems ab. Wie ändert sie sich bei Halbierung der Gitterweite? Was bedeutet dies für die Anzahl der typischerweise nötigen Iterationsschritte?