Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. A. Luttmann

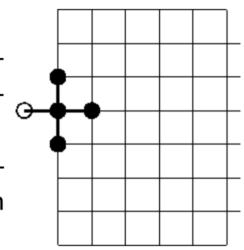
Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 2 — 30.10.2018
Abgabe: 06.11.2018 — Abgabe Programmieraufgabe: 13.11.18

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Diskretisierung des Laplace-Problems mit Neumann-Randbedingung:
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad n \cdot \nabla u = g_N \quad \text{auf } \Gamma_N, \qquad u = g_D \quad \text{auf } \Gamma_D$$

mit $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$ und gegebenen Funktionen f, g_N, g_D.



Nutzen Sie jeweils den einseitigen und den zentralen Differenzenquotienten zur Approximation der Normalenableitung am Rand eines Rechteckgebiets.
Leiten Sie damit eine Bedingung für die außerhalb des Gebiets liegenden Punkte des 5-Punkte-Differenzensterns her, der in den Randpunkten angesetzt wird.
Wie sieht jeweils der modifizierte Differenzenstern für homogene Neumann-Randbedingungen aus,

$$\nabla u \cdot n = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \text{ ?}$$

Programmieraufgabe 1 (12 Punkte)
Implementieren Sie das Finite Differenzen Verfahren für das Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega = (A,B)^2, \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

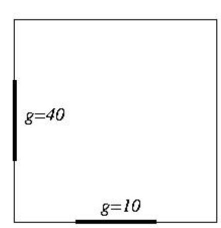
Verwenden Sie den aus der Vorlesung bekannten 5-Punkte-Stern.
Speichern Sie die Matrix des linearen Gleichungssystems dabei als dünn besetzte (*sparse*) Matrix ab. Stellen Sie die Lösung graphisch dar (z. B. mit Hilfe der Funktion `mesh()` in Matlab).

a) Testen Sie das Programm anhand der Funktion

$$u(x_1, x_2) = \sin(x_1) * \cos(2\pi x_2)$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$. Berechnen Sie den maximalen Fehler in einem Gitterpunkt und untersuchen Sie die Fehlerabnahme bei Halbierung der Schrittweite, für $h = \frac{1}{N}$ mit $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$.

b) Berechnen Sie die stationäre Wärmeverteilung in einem quadratischen Raum $\Omega = (0,1)^2$ ohne innere Wärmequelle (also mit $f = 0$) mit den folgenden Temperaturrandwerten:



Im Bereich $(0.3, 0.7) \times \{0\}$ befindet sich ein Fenster, dort gilt $g = 10$, im Bereich $\{0\} \times (0.3, 0.7)$ befindet sich eine Heizung, dort gilt $g = 40$, an allen anderen Randpunkten ist $g = 20$.

c) Berechnen Sie die Temperaturverteilung wie in b), wenn die Wände (außer Fenster und Heizung) isoliert sind, also dort eine homogene Neumann-Bedingung gilt (vgl. Aufgabe 6).